

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta095

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine partea reală a numărului $z = i^{20} + i^{21} + i^{22}$.
- (4p) b) Să se determine modulul numărului $z = i^{30} + i^{31}$.
- (4p) c) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile $A(2,0), B(-1,4), C(2,4)$.
- (4p) d) Să se calculeze $\cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{5\pi}{6}$.
- (2p) e) Să se arate că punctul $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ este egal depărtat de punctele $N(1,0)$ și $P(0,1)$.
- (2p) f) Să se dea un exemplu de număr real t pentru care $\sin t \in (-1,0)$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se dea un exemplu de progresie aritmetică cu 5 termeni în care doi dintre termeni sunt egali cu 5 și respectiv 11.
- (3p) b) Să se dea un exemplu de matrice $A \in M_2(\mathbf{R})$ pentru care $\det(A) = 2$.
- (3p) c) Să se dea un exemplu de matrice $B \in M_3(\mathbf{R})$ pentru care $\text{rang}(B) = 2$.
- (3p) d) Să se dea un exemplu de numere $a, b \in \mathbf{R}$ pentru care $\log_2 a = \log_3 b$.
- (3p) e) Să se dea un exemplu de lege de compoziție definită pe \mathbf{R} care are elementul neutru $e = 1$.

2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x}$.

- (3p) a) Să se arate că $\log_2 f(2) + \log_2 f(3) + \dots + \log_2 f(15) \in \mathbf{N}$.
- (3p) b) Să se determine $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.
- (3p) d) Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f .
- (3p) e) Să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

Varianta 095

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $G = \left\{ X(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{Z} \right\}$.

- (4p) a) Să se arate că $A \cdot B \in G$, $\forall A, B \in G$.
- (4p) b) Să se arate că $I_2 \in G$, $O_2 \notin G$.
- (4p) c) Să se arate că $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$, $\forall A, B \in G$.
- (2p) d) Să se arate că $\forall A \in G$, $\exists C \in G$ astfel încât $A \cdot C = C \cdot A = I_2$.
- (2p) e) Să se calculeze matricea $X^n(3)$, $n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Să se calculeze determinantul și rangul matricei $X(3)$.
- (2p) g) Să se arate că dacă $A, B \in G$ și $A \cdot B = X(2007)$, atunci există $D \in G$ astfel încât $D^{2007} = B \cdot A$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se arate că f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.
- (4p) c) Să se determine ecuația asymptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- (2p) d) Să se arate că există $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq b$ pentru care $f(a) = f(b)$.
- (2p) e) Să se arate că $f(x) \leq \frac{1}{x}$, $\forall x \in (0, \infty)$.
- (2p) f) Să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.
- (2p) g) Să se arate că $\operatorname{arctg} e \leq \frac{\pi+2}{4}$.

Varianta 095

SUBIECTUL I

- a) $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(1+i-1) = 0$. b) $|z| = |-1-i| = \sqrt{2}$. c) $S = 6$. d) 0 .
- e) Avem $MN = MP$, deoarece M este mijlocul segmentului NP . f) $t = -\frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL II

1.

a) De exemplu progresia: -1, 5, 11, 17, 23.

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$. c) $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang}(B) = 2$, căci $\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ și $\det(B) = 0$.

d) $a = b = 1$.

e) Legea $*$ definită de $x * y = x + y - 1, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

2.

a) $\sum_{k=2}^{15} \log_2 f(k) = \log_2 \left(\prod_{k=2}^{15} f(k) \right) = \log_2 \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{16}{15} \right) = \log_2 8 = 3 \in \mathbf{N}$.

b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}, x \in (0, \infty)$.

c) nu există puncte de extrem local ale funcției f .

d) $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$, $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta.

e) $\int_1^e f(x) dx = (x + \ln x)|_1^e = e$.

SUBIECTUL III

a) Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G, B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, atunci $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = X(a+b) \in G$,

căci $a+b \in \mathbf{Z}$.

b) Avem $I_2 = X(0) \in G$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, deci $O_2 \notin G$.

c) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G, B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$. Atunci $\det(A \cdot B) = 1 = \det(A) \cdot \det(B)$.

d) Pentru orice $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, considerăm $C = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, și utilizând a) avem că $A \cdot C = C \cdot A = X(a) \cdot X(-a) = I_2$.

e) Dacă $a \in \mathbf{Z}$, atunci avem $X(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$X^2(a) = X(a) \cdot X(a) = X(2a) = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Presupunând că $X^k(a) = X(ka)$, $k \in \mathbf{N}^*$, avem că $X^{k+1}(a) = X^k(a) \cdot X(a) = X(ka) \cdot X(a) = X(a(k+1))$, $k \in \mathbf{N}^*$. Conform principiului inducției matematice rezultă $X^n(a) = X(na) = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, deci

$$X^n(3) = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

f) $\det(X(3)) = 1$, $\text{rang}(X(3)) = 2$. g) Fie $A = X(a) \in G$, $B = X(b) \in G$. Din

$$X(a)X(b) = X(2007) \stackrel{a)}{\Rightarrow} X(a+b) = X(2007) \Rightarrow a+b = 2007.$$

Folosind rezultatele de la a) și e), ecuația $D^{2007} = B \cdot A$ devine

$$D^{2007} = X(b+a) \Leftrightarrow X(2007d) = X(2007), \text{ deci } d = 1 \text{ și } D = X(1) \in G \text{ este soluție.}$$

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$, $x \in \mathbf{R}$. b) Din a) rezultă $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$, deci

funcția f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

c) $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$. d) $a = 1, b = -1$.

e) Dacă $x \in (0, \infty)$, atunci $f(x) \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{2}{1+x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x(1+x^2)} \geq 0$, relație

adevărată.

$$f) \int_1^e f(x) dx = 2 \operatorname{arctg} x \Big|_1^e = 2 \left(\operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4} \right).$$

$$g) \text{ Din e) rezultă că } \int_1^e f(x) dx \leq \int_1^e \frac{1}{x} dx \stackrel{f)}{\Rightarrow} 2 \cdot \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{2} \leq \ln x \Big|_1^e = 1 \Rightarrow \operatorname{arctg} e \leq \frac{\pi + 2}{4}.$$