

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta ...094

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{4-3i}{4+3i}$.
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului cu capetele în punctele $A(3, 12)$ și $C(4, 13)$.
- (4p) c) Să se determine partea reală a numărului complex $(2-i)(3-i)$.
- (4p) d) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(3, 12)$ și $C(4, 13)$ să aparțină dreptei de ecuație $x + ay + b = 0$.
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(3, 12)$, $B(2, 2)$ și $C(4, 13)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să aibă loc egalitatea de numere complexe

$$\frac{15+6i}{6-15i} = a+bi.$$

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze $\hat{2}^{2007}$ în \mathbf{Z}_8 .
- (3p) b) Să se calculeze $C_8^3 - C_8^5 + C_8^8$.
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_5 x = -1$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $64^x - 32 = 0$.
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $3^n < 19$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 5x - 1$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- (3p) d) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \ln n + 3}{5 \ln n - 2}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pentru orice $x \in \mathbf{C}$,

definim matricea $B(x) = A + xI_3$ și funcția polinomială $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, $f(x) = \det B(x)$.

- (4p) a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
- (4p) b) Să se arate că $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x$, $\forall x \in \mathbf{C}$.
- (4p) c) Să se rezolve în \mathbf{C} ecuația $f(x) = 0$.
- (2p) d) Să se arate că matricea $B(2)$ este inversabilă.

- (2p) e) Să se găsească o matrice nenulă $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbf{C})$ cu proprietatea $AU = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- (2p) f) Să se găsească o matrice nenulă $C \in M_{3,3}(\mathbf{C})$ cu proprietatea $AC = O_3$.

- (2p) g) Să se arate că **nu există** o matrice $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbf{C})$ cu proprietatea $AV = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Pentru oricare $p \in \mathbf{N}$ și $q \in \mathbf{N}$ definim: $B(p, q) = \int_0^1 x^q (1-x)^p dx$, $\forall p, q \in \mathbf{N}^*$,

$B(0, q) = \int_0^1 x^q dx$, $\forall q \in \mathbf{N}^*$, $B(p, 0) = \int_0^1 (1-x)^p dx$, $\forall p \in \mathbf{N}^*$ și $B(0, 0) = \int_0^1 1 dx$.

- (4p) a) Să se calculeze $B(1, 1)$.
- (4p) b) Să se arate că $B(0, n) = \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
- (4p) c) Să se calculeze $B(n, 0)$, $n \in \mathbf{N}$.
- (2p) d) Efectuând schimbarea de variabilă $x = 1-t$, să se arate că

$$B(p, q) = B(q, p), \forall p, q \in \mathbf{N}.$$

- (2p) e) Utilizând metoda integrării prin părți, să se arate că

$$B(p, q) = \frac{p}{q+1} B(p-1, q+1), \forall p \in \mathbf{N}^*, \forall q \in \mathbf{N}.$$

- (2p) f) Să se arate că $B(n, q) = \frac{n! q!}{(q+n)!} B(0, n+q)$, $\forall n, q \in \mathbf{N}$.

- (2p) g) Să se arate că $B(p, q) = \frac{p! q!}{(p+q+1)!}$, $\forall p, q \in \mathbf{N}$.

Varianta 94

SUBIECTUL I

a) 1. b) $AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. c) partea reală este 5. d) $a = -1, b = 9$. e) $S = \frac{9}{2}$.

f) $a = 0, b = 1$.

SUBIECTUL II

1. a) $\hat{2}^{2007} = \hat{2}^3 \cdot \hat{2}^{2004} = \hat{0}$. b) $E = 0 + 1 = 1$. c) $x = \frac{1}{5}$. d) $6x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}$. e) $p = \frac{2}{5}$.

2.

a) $f'(x) = 3x^2 + 5, x \in \mathbf{R}$. b) $\frac{7}{4}$. c) 5. d) Din a) rezultă că $f'(x) > 0$ pentru orice

$x \in \mathbf{R}$, deci funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} . e) $\frac{2}{5}$.

SUBIECTUL III

a) $\det(A) = 0$ și $\text{rang}(A) = 2$, căci $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$.

b) $B(x) = \begin{pmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 3 \\ 3 & 2 & x+1 \end{pmatrix}$. Atunci

$$f(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x+2 & 3 \\ 3 & 2 & x+1 \end{vmatrix} = x^3 + 4x^2 - 5x, \forall x \in \mathbf{C}.$$

c) $x(x^2 + 4x - 5) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -5$.

d) $\det B(2) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \Rightarrow B(2)$ este inversabilă.

e) Ecuația $A \cdot U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a+2b+3c=0 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases}$. Sistemul este compatibil fiind liniar

omogen și simplu nedeterminat conform lui a). Soluția sa este $\begin{cases} a=\alpha \\ b=-2\alpha, \alpha \in \mathbf{C} \\ c=\alpha \end{cases}$

Putem considera, de exemplu. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

f) Putem considera $C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

g) Dacă am avea $A \cdot V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, atunci $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$. Cum rangul matricei A a

sistemului este 2 și rangul matricei extinse este 3 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, avem că sistemul

este incompatibil.

SUBIECTUL IV

a) $\frac{1}{6}$. b) $B(0, n) = \frac{1}{n+1}$. c) $B(n, 0) = \frac{1}{n+1}$.

d) Dacă $x = 1-t$, atunci $B(p, q) = -\int_1^0 (1-t)^q \cdot t^p dt = \int_1^0 t^p \cdot (1-t)^q dt = B(q, p)$.

e) $B(p, q) = \int_0^1 \left(\frac{x^{q+1}}{q+1} \right)' (1-x)^p dx = -\frac{1}{q+1} \int_0^1 x^{q+1} (1-x)^{p-1} (-p) dx = \frac{p}{q+1} B(p-1, q+1)$.

f) Aplicând repetat e), avem

$$B(n, q) = \frac{n}{q+1} \cdot B(n-1, q+1) = \frac{n! \cdot q!}{(q+n)!} \cdot B(0, n+q), \forall n, q \in \mathbb{N}.$$

g) Utilizând f) și b) avem

$$B(p, q) = \frac{p! \cdot q!}{(p+q)!} \cdot B(0, p+q) = \frac{p! \cdot q!}{(q+p)!(q+p+1)} = \frac{p! \cdot q!}{(p+q+1)!}, \forall p, q \in \mathbb{N}.$$