

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D**
*Varianta ....093*

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările  
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze  $\sin^2 \frac{3\pi}{4} + \cos^2 \frac{3\pi}{4}$ .
- (4p) b) Să se calculeze coordonatele mijlocului segmentului cu extremitățile în punctele  $A(-1, 3)$  și  $C(3, -1)$ .
- (4p) c) Să se determine partea reală a numărului complex  $(1-3i)(3-i)$ .
- (4p) d) Să se determine ecuația tangentei la parabola  $y^2 = 6x$  în punctul  $A(2, 2\sqrt{3})$ .
- (2p) e) Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al triunghiului cu vârfurile în punctele  $A(-1, 3)$ ,  $B(2, 2)$  și  $C(3, -1)$ .
- (2p) f) Să se calculeze lungimea laturii unui pătrat, dacă diagonala sa este  $\sqrt{8}$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1.

- (3p) a) Să se determine inversa funcției  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 2x + 1$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $C_6^3 - C_6^4 + C_6^6$ .
- (3p) c) Să se dea un exemplu de număr întreg  $k$  pentru care  $2 < \log_4 k < 3$ .
- (3p) d) Să se rezolve în multimea numerelor naturale nenule ecuația  $\frac{x!}{(x-1)!} = 4$ .
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  să verifice relația  $3^n \geq 21$ .

 2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 4x^3 + 2x + 1$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- (3p) c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .
- (3p) d) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n+3}{4n-2}$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

În mulțimea  $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$  se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ și } Y = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}, \text{ unde } a, b \in \mathbf{R}.$$

- (4p) a) Să se calculeze determinantul matricei  $X$ .
- (4p) b) Să se calculeze rangul matricei  $X$ .
- (4p) c) Să se arate că matricea  $U$  este inversabilă și  $U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
- (2p) d) Să se calculeze produsul  $U \cdot A \cdot U^{-1}$ .
- (2p) e) Să se determine  $a, b \in \mathbf{R}$ , astfel încât matricea  $Y = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$  să verifice relația  $X \cdot Y - Y \cdot X = U \cdot A \cdot U^{-1}$ .
- (2p) f) Să se verifice egalitatea  $B^{-1} \cdot Z \cdot W \cdot B = (B^{-1} \cdot Z \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot W \cdot B)$ ,  
 $\forall B, Z, W \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ , unde matricea  $B$  este inversabilă.
- (2p) g) Să se arate că există matricele  $P, Q \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ , cu proprietatea  $A = P \cdot Q - Q \cdot P$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \ln(x^2 + e)$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) b) Să se arate că, dacă  $x \in [1, \ln(e+1)]$ , atunci  $(x-1)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(e+1)}\right) \geq 0$ .
- (2p) c) Utilizând eventual inegalitatea de la punctul b), să se arate că, dacă  $x \in [1, \ln(e+1)]$ , atunci  $\frac{1}{x} + \frac{x}{\ln(e+1)} \leq \frac{1+\ln(e+1)}{\ln(e+1)}$ .
- (2p) d) Să se verifice că  $\frac{1}{f(x)} + \frac{f(x)}{\ln(e+1)} \leq \frac{1+\ln(e+1)}{\ln(e+1)}$ ,  $\forall x \in [0,1]$ .
- (4p) e) Să se arate că, dacă  $u, v \in \mathbf{R}$ , atunci  $(u+v)^2 \geq 4uv$ .
- (2p) f) Integrând inegalitatea de la punctul d), să se arate că  

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx + \frac{1}{\ln(e+1)} \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1+\ln(e+1)}{\ln(e+1)}$$
.
- (2p) g) Utilizând inegalitatea de la punctul e), să se arate că  

$$\left( \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \right) \cdot \left( \int_0^1 f(x) dx \right) \leq \frac{(1+\ln(e+1))^2}{4\ln(e+1)}$$
.

## Varianta 93

### SUBIECTUL I

a) 1. b)  $M(1,1)$ . c) 0. d)  $2\sqrt{3}y = 3(x+2)$ .

d)  $2\sqrt{3}y = 3(x+2)$ . e)  $G\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ . f)  $a = 2$ .

### SUBIECTUL II

a) Funcția  $f$  este bijectivă și  $f(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}$ . Inversa funcției  $f$  este funcția

$f^{-1}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x-1}{2}$ . b)  $E = 20 - 15 + 1 = 6$ . c) De exemplu  $k = 17$  (de fapt

$k \in \{17, 18, \dots, 63\}$ ). d) Soluția este  $x = 4$ . e)  $p = \frac{3}{5}$ .

2.

a)  $f'(x) = 12x^2 + 2, \forall x \in \mathbf{R}$ . b) 3. c)  $f'(0) = 2$ .

d)  $f'(x) > 0$  pentru orice  $x \in \mathbf{R}$ , deci  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ . e)  $-\frac{3}{4}$ .

### SUBIECTUL III

a)  $\det(X) = 2$ . b)  $\text{rang}(X) = 2$ .

c) Cum  $\det(U) = 1 \neq 0$  rezultă  $U$  este inversabilă. Matricea  $U^{-1}$  se determină prin

calcul sau se verifică faptul că  $U^{-1} \cdot U = U \cdot U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

d) Avem că  $U \cdot A \cdot U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

e)  $a = -3, b = 1$ . f)

f)  $(B^{-1} \cdot Z \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot W \cdot B) = ((B^{-1} \cdot Z \cdot B)B^{-1})(W \cdot B) = B^{-1} \cdot Z \cdot W \cdot B$ , deci are loc egalitatea cerută.

g)  $P = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & a \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}, a, x \in \mathbf{R}$  verifică ecuația dorită.

### SUBIECTUL IV

a)  $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 2}, \forall x \in \mathbf{R}$ .

b) Dacă  $x \in [1, \ln(e+1)]$ , atunci  $x-1 \geq 0$  și  $1 \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{\ln(e+1)}$ , de unde obținem inegalitatea dorită.

- c) Efectuând înmulțirea în inegalitatea de la b), obținem inegalitatea de demonstrat.  
d) Din a) avem că  $f'(x) > 0$  pentru  $x \in [0,1]$ , deci  $f$  este crescătoare pe  $[0,1]$ .

Atunci  $1 = f(0) \leq f(x) \leq f(1) = \ln(e+1)$ ,  $\forall x \in [0,1]$  și înlocuind în c) pe  $x$  cu  $f(x) \in [1, \ln(e+1)]$ , obținem inegalitatea de demonstrat.

e) Pentru  $\forall u, v \in \mathbf{R}$ ,  $(u+v)^2 \geq 4uv \Leftrightarrow (u-v)^2 \geq 0$ , adevărată.

f) Din d) avem  $\int_0^1 \left( \frac{1}{f(x)} + \frac{f(x)}{\ln(e+1)} \right) dx \leq \int_0^1 \frac{1+\ln(e+1)}{\ln(e+1)} dx = \frac{1+\ln(e+1)}{\ln(e+1)}$ , și utilizând proprietatea de liniaritate a integralei definite, găsim inegalitatea de demonstrat.

g) Luăm  $u = \int_0^1 f(x) dx$ ,  $v = \frac{1}{\ln(e+1)} \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx$  în inegalitatea de la e) și avem

$$u \cdot \left( \frac{1}{\ln(e+1)} \cdot v \right) \stackrel{e)}{\leq} \frac{1}{4} \cdot \left( u + \frac{1}{\ln(e+1)} \cdot v \right)^2 \stackrel{f)}{\leq} \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1+\ln(e+1)}{\ln(e+1)} \right)^2, \text{ de unde se obține inegalitatea cerută.}$$