

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta092

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex i^{2007} .
- (4p) b) Să se determine partea reală a numărului complex i^{2007} .
- (4p) c) Să se determine semnul numărului $\sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3}$.
- (4p) d) Să se calculeze aria triunghiului ABC , dacă $AB = 6$, $BC = 10$ și măsura unghiului B este de 45° .
- (2p) e) Să se determine ecuația cercului cu centru în punctul $M(1;-1)$ și raza 2.
- (2p) f) Să se determine distanța de la punctul $A(1;1;-1)$ la planul de ecuație $3x + 2y - z = 0$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2 + 3x - 4 = 0$.
- (3p) b) Să se determine numărul de elemente ale mulțimii A dacă aceasta are exact 8 submulțimi.
- (3p) c) Să se determine numărul real x dacă numerele 2; x și $x+4$ (în această ordine) sunt în progresie aritmetică.
- (3p) d) Să se calculeze suma rădăcinilor ecuației $2x^3 - 6x^2 + 8x + 1 = 0$.
- (3p) e) Să se calculeze $\hat{4}^{2007}$ în \mathbf{Z}_5 .

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (x-2)^3$.

- (3p) a) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^3}$.
- (3p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$.
- (3p) d) Să se arate că $x=2$ este punct de inflexiune pentru graficul funcției f .
- (3p) e) Să se calculeze $\int_1^2 f^3(x) dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și multimea

$$C(A) = \{X \in M_2(\mathbb{C}) \mid XA = AX\}.$$

- (4p) a) Să se calculeze determinantul matricei A .
- (4p) b) Să se calculeze matricea A^2 .
- (4p) c) Să se determine rangul matricei A .
- (2p) d) Să se arate că matricea A este inversabilă și să se calculeze inversa acesteia.
- (2p) e) Să se arate că, dacă $U, V \in C(A)$, atunci $U \cdot V \in C(A)$.
- (2p) f) Să se arate că, dacă $X \in C(A)$, atunci există $a, b \in \mathbb{C}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.
- (2p) g) Să se arate că, dacă $Y \in C(A)$ și $Y^{2007} = O_2$, atunci $Y^2 = O_2$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5$ și $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- (4p) a) Să se verifice identitatea $F(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- (4p) b) Să se verifice că $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- (4p) c) Să se arate că $(x - 1)F(x) = x^7 - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- (2p) d) Să se arate că $F(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- (2p) e) Să se arate că există $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ pentru care $F(a) = F(b)$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot f(n)}{F(n)}$.
- (2p) g) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $f(x^2) = 1$.

Varianta 092

SUBIECTUL I

a) $|i^{2007}| = |-i| = 1$. b) $\operatorname{Re}(i^{2007}) = 0$. c) numărul este pozitiv. d) $S = 15\sqrt{2}$.

e) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$. f) $\frac{6}{\sqrt{14}}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $x \in \{-4, 1\}$. b) $\operatorname{card}(A) = 3$. c) $x = 6$. d) $x_1 + x_2 + x_3 = 3$. e) $\hat{4}^{2007} = (\hat{4}^2)^{1003} \cdot \hat{4} = \hat{4}$.

2.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n} \right)^3 = 1$. b) $f'(x) = 3(x-2)^2$, $x \in \mathbf{R}$. c) 3. d) $x = 2$ punct de inflexiune. e) $-\frac{1}{10}$.

SUBIECTUL III

a) $\det(A) = 1$. b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. c) $\det(A) \neq 0$, deci $\operatorname{rang}(A) = 2$. d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

e) Dacă $U, V \in C(A)$, atunci

$(UV)A = U(VA) = U(AV) = (UA)V = (AU)V = A(UV)$, deci $UV \in C(A)$.

f) Dacă $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in C(A)$, atunci $z = 0, t = x$, de unde rezultă $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$. Putem considera $a = x, b = y \in \mathbf{C}$.

g) Dacă $Y \in C(A)$, atunci din f) avem $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, deci

$Y^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$, $Y^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$. Prin inducție matematică se arată că

$Y^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbf{N}^*$. Atunci $Y^{2007} = O_2 \Rightarrow a = 0$, deci $Y = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $Y^2 = O_2$.

SUBIECTUL IV

a) $F(x) = 1 + (t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6) \Big|_0^x = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$, $x \in \mathbf{R}$.

b) Rezultă imediat folosind a).

c) Utilizând a) avem:

$$(x-1)F(x) = (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^7 - 1, \forall x \in \mathbf{R}.$$

d) Avem $F(1) \stackrel{a)}{=} 7, F(x) = \frac{x^7 - 1}{x - 1}$. Pentru $x > 1 \Rightarrow x^7 > 1 \Rightarrow F(x) > 0$. Pentru

$x < 1 \Rightarrow x^7 < 1 \Rightarrow F(x) > 0$. Așadar $F(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

e) Din a) avem că $F(0) = F(-1) = 1$, deci $a = 0, b = -1$.

f) 6. g) $x = 0$.