

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta090

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ pentru care $(1+2i)(2+i) = a+bi$.
- (4p) b) Să se determine panta dreptei de ecuație $-x+y-3=0$.
- (4p) c) Să se calculeze produsul de numere complexe $i \cdot i^2 \cdots i^{10}$.
- (4p) d) Să se determine $a \in \mathbf{R}$, astfel încât punctul $A(2, a)$ să aparțină dreptei de ecuație $x-ay+2=0$.
- (2p) e) Să se calculeze perimetrul triunghiului cu vârfurile în punctele $A(2, 1)$, $B(1, 1)$ și $C(1, 2)$.
- (2p) f) Să se calculeze $\sin 75^\circ$, folosind eventual egalitatea $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se rezolve în \mathbf{Z}_8 ecuația $5\hat{x} = \hat{7}$.
- (3p) b) Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât suma rădăcinilor ecuației $x^2 - (m+3)x - m + 1 = 0$ să fie 5.
- (3p) c) Să se arate că $\log_2 10 - \log_2 5$ este un număr întreg.
- (3p) d) Să se rezolve în multimea numerelor reale ecuația $8^x - 2 = 0$.
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element n din multimea $\{2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $C_n^2 < 5$.

 2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x^3 + 4x - 1$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- (3p) d) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n}{2n^2 + 1}$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

Varianta 090

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră M mulțimea matricelor cu două linii și două coloane și toate elementele

$$\text{numere naturale și matricele } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (4p) a) Să se verifice că $E \in M$ și că $I_2 \in M$.
- (4p) b) Să se arate că, dacă $A, B \in M$, atunci $A + B \in M$.
- (4p) c) Să se arate că, dacă $A, B \in M$, atunci $A \cdot B \in M$.
- (2p) d) Să se găsească o matrice $C \in M$, astfel încât $\text{rang}(C) = 1$.
- (2p) e) Să se găsească o matrice $D \in M$, astfel încât $\det(D) = 2007$.
- (2p) f) Să se arate că matricea E este inversabilă și $E^{-1} \notin M$.
- (2p) g) Să se determine toate matricele $X \in M$, inversabile, cu proprietatea că $X^{-1} \in M$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^{x^2}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se arate că, dacă $x \in [1, e]$, atunci $(x-1)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e}\right) \geq 0$.
- (4p) c) Utilizând eventual inegalitatea de la punctul b), să se arate că, dacă $x \in [1, e]$, atunci $\frac{1}{x} + \frac{x}{e} \leq \frac{1+e}{e}$.
- (2p) d) Să se verifice că $\frac{1}{f(x)} + \frac{f(x)}{e} \leq \frac{1+e}{e}$, $\forall x \in [0, 1]$.
- (2p) e) Să se arate că, dacă $u, v \in \mathbf{R}$, atunci $(u+v)^2 \geq 4uv$.
- (2p) f) Integrând inegalitatea de la punctul d), să se arate că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx + \frac{1}{e} \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1+e}{e}$.
- (2p) g) Utilizând inegalitatea de la punctul e), să se arate că $\left(\int_0^1 e^{x^2} dx \right) \cdot \left(\int_0^1 e^{-x^2} dx \right) \leq \frac{(e+1)^2}{4e}$.

Varianta 090

SUBIECTUL I

a) $a = 0, b = 5$. b) $m_d = 1$. c) $-i$. d) Din $2 - a^2 + 2 = 0 \Rightarrow a \in \{\pm 2\}$. e) $2 + \sqrt{2}$.

f) $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $x = (\hat{5})^{-1} \cdot \hat{7} = \hat{5} \cdot \hat{7} = \hat{3}$. b) $m = 2$. c) 1. d) $2^{3x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$. e) $p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

2.

a) $f'(x) = 6x^2 + 4, x \in \mathbf{R}$. b) $\frac{3}{2}$. c) 4. d) $f'(x) > 0$ pentru $x \in \mathbf{R}$, deci f este strict crescătoare pe \mathbf{R} . e) $\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL III

a) $I_2, E \in M$ căci $0, 1, 2 \in \mathbf{N}$.

b) Prin calcul imediat. c) Prin calcul imediat.

d) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M, \text{ rang}(C) = 1$. e) $D = \begin{pmatrix} 2007 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \in M, \det(M) = 2007$.

f) Cum $\det(E) = 1$, rezultă că E este inversabilă. Prin calcul, $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \notin M$.

g) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M$ și $X^{-1} \in M$. Deoarece $X \cdot X^{-1} = I_2$ avem că $\det(X \cdot X^{-1}) = \det(I_2)$, deci $\det(X) \cdot \det(X^{-1}) = 1$, se consideră mai de patre două cazuri.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = 2x \cdot e^{x^2}, x \in \mathbf{R}$.

b) Dacă $x \in [1, e]$, atunci $x - 1 \geq 0$ și $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{e}$, deci inegalitatea este adevărată.

c) Din b) efectuând înmulțirea, obținem $1 - \frac{x}{e} - \frac{1}{x} + \frac{1}{e} \geq 0$, de unde rezultă inegalitatea cerută.

d) Dacă $x \in [0, 1]$, atunci $x^2 \in [0, 1]$, deci $f(x) = e^{x^2} \in [1, e]$ și folosind c), rezultă inegalitatea cerută.

e) $(u+v)^2 \geq 4uv \Leftrightarrow (u-v)^2 \geq 0$, inegalitate adevărată pentru $\forall u, v \in \mathbf{R}$.

f) Din d) rezultă că $\int_0^1 \left(\frac{1}{f(x)} + \frac{f(x)}{e} \right) dx \leq \int_0^1 \frac{1+e}{e} dx = \frac{1+e}{e} \cdot x \Big|_0^1 = \frac{1+e}{e}$, și folosind proprietatea de liniaritate a integralei definite, rezultă concluzia.

g) Fie $u = \int_0^1 e^{x^2} dx \in [1, e]$, $v = \int_0^1 e^{-x^2} dx \in \left[\frac{1}{e}, 1 \right]$. Atunci avem

$$u \cdot \left(\frac{1}{e} \cdot v \right) \stackrel{e)}{\leq} \frac{\left(u + \frac{1}{e} \cdot v \right)^2}{4} \stackrel{f)}{\leq} \frac{(e+1)^2}{4e^2}, \text{ de unde se obține inegalitatea dorită.}$$