

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta089

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

Se consideră triunghiul echilateral ABC cu latura de lungime 10.

- (4p) a) Să se determine cosinusul unghiului $B\hat{A}C$.
- (4p) b) Să se calculeze produsul scalar $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
- (4p) c) Să se calculeze aria triunghiului ABC .
- (4p) d) Să se determine lungimea înălțimii triunghiului ABC .
- (2p) e) Să se determine lungimea vectorului \overrightarrow{AD} dacă $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
- (2p) f) Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC .

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se determine restul împărțirii polinomului $f = 2X^3 + X^2 + 1$ la polinomul $X + 2$.
 - (3p) b) Să se arate că numărul complex i este rădăcină a polinomului $f \in \mathbf{C}[X]$, $f = X^{2007} + X$.
 - (3p) c) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$.
 - (3p) d) Să se determine rangul matricei $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
 - (3p) e) Să se determine valoarea minimă a funcției $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
2. Se consideră funcția $f : (-\infty; -1] \cup [1; \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$.
- (3p) a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - (3p) b) Să se determine ecuația asymptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
 - (3p) c) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.
 - (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.
 - (3p) e) Să se calculeze $\int_2^{\sqrt{10}} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră funcțiile $f_a : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_a(x) = x + a$, $a \in \mathbf{R}$, mulțimea $G = \{f_a | a \in \mathbf{R}\}$ și funcția $g : G \rightarrow \mathbf{R}$, $g(f_a) = a$.

- (4p) a) Să se demonstreze că $f_a \circ f_b = f_{a+b}$, $\forall f_a, f_b \in G$.
- (4p) b) Să se demonstreze că $f_a \circ f_0 = f_0 \circ f_a = f_a$, $\forall f_a \in G$.
- (4p) c) Să se demonstreze că $f_a \circ f_{-a} = f_{-a} \circ f_a = f_0$, $\forall f_a \in G$.
- (2p) d) Să se demonstreze că (G, \circ) este grup abelian.
- (2p) e) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ dacă $f_a \circ f_a \circ f_a = f_{15}$.
- (2p) f) Să se demonstreze că $g(f_a \circ f_b) = g(f_a) + g(f_b)$, $\forall f_a, f_b \in G$.
- (2p) g) Utilizând eventual metoda inducției matematice, să se arate că $g\left(\underbrace{f_a \circ f_a \circ \dots \circ f_a}_n\right) = na$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall f_a \in G$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$.

- (4p) a) Să se determine $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se arate că $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se arate că f' este o funcție crescătoare pe \mathbf{R} și $f'(x) > 0$, $\forall x \in (0, \infty)$.
- (2p) d) Să se arate că $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^4}$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - f(x))^{\frac{1}{x^2}}$.
- (2p) g) Folosind eventual d), să se arate că $\int_0^1 \cos(x^2) dx \geq \frac{9}{10}$.

Varianta 089

SUBIECTUL I

a) $\cos(B\hat{A}C) = \frac{1}{2}$. b) 50. c) $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$. d) $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$. e) $10\sqrt{3}$. f) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

SUBIECTUL II

1.

a) Restul este $r = f(-2) = -11$. b) 0. c) 1. d) Rangul cerut este 1. e) $f_{\min} = -1$.

2.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1}) = -\infty$.

b) $y = 0$. c) $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

d) $f'(2) = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$. e) $5 - \sqrt{10} - \sqrt{3}$.

SUBIECTUL III

a) $f_a, f_b \in G \Rightarrow f_a \circ f_b : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $(f_a \circ f_b)(x) = f_a(f_b(x)) = f_b(x) + a = x + b + a = f_{a+b}(x)$, $\forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f_a \circ f_b = f_{a+b}$.

b) Din a) rezultă că $f_a \circ f_0 = f_a = f_0 \circ f_a$, $\forall f_a \in G$.

c) Rezultă imediat folosind a).

d) Partea stabilă se obține din a), elementul neutru este $f_0 \in G$ și rezultă din b). Din c) rezultă că orice element $f_a \in G$ este simetrizabil și simetricul său este $f_{-a} \in G$.

Deoarece compunerea funcțiilor este asociativă, iar din a) se obține comutativitatea, va rezulta că (G, \circ) este grup abelian.

e) Utilizând a) avem $f_{3a} = f_{15} \Rightarrow a = 5$.

f) Utilizând a) avem $g(f_a \circ f_b) = g(f_{a+b}) = a + b = g(f_a) + g(f_b)$, $\forall f_a, f_b \in G$.

g) Pentru $n = 1$ afirmația este evident adevărată. Presupunem că afirmația este adevărată pentru $n = k \in \mathbf{N}^*$. Atunci

$$g\left(\underbrace{f_a \circ f_a \circ \dots \circ f_a}_{k+1 \text{ ori}}\right) = g(f_a) + g\left(\underbrace{f_a \circ f_a \circ \dots \circ f_a}_{k \text{ ori}}\right) = a + ka = (k+1)a, \text{ adică afirmația}$$

este adevărată și pentru $n = k + 1$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = -\sin x + x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

b) $f''(x) = 1 - \cos x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

c) Din b) rezultă că $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$ și se anulează doar în $x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, deci f' este strict crescătoare pe \mathbf{R} . Cum $f'(0) = 0$ vom avea că $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$.

d) Deoarece $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$, avem că f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$. Din c) avem că $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in (-\infty, 0)$, deci $f(x) \geq f(0) = 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

e) $\frac{1}{24}$. f) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

g) Din d) rezultă $\cos(x^2) \geq 1 - \frac{x^4}{2}, x \in \mathbf{R}$, deci

$$\int_0^1 \cos(x^2) dx \geq \int_0^1 \left(1 - \frac{x^4}{2}\right) dx = \left(x - \frac{x^5}{10}\right) \Big|_0^1 = \frac{9}{10}.$$