

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D**
***Varianta ....088***

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**
**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex  $\frac{4-3i}{3-4i}$ .
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului cu extremitățile în punctele  $A(3, 6)$  și  $C(4, 7)$ .
- (4p) c) Să se determine partea reală a numărului complex  $P = i \cdot i^3 \cdot i^5 \cdot i^7 \cdot i^9 \cdot i^{11}$ .
- (4p) d) Să se determine  $a, b \in \mathbf{R}$ , astfel încât punctele  $A(3, 6)$  și  $C(4, 7)$  să aparțină dreptei de ecuație  $x + ay + b = 0$ .
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele  $A(3, 6)$ ,  $B(1, 1)$  și  $C(4, 7)$ .
- (2p) f) Să se determine  $a, b \in \mathbf{R}$ , astfel încât să aibă loc egalitatea de numere complexe
- $$\frac{5+2i}{2-5i} = a + bi.$$

**SUBIECTUL II ( 30p )**
**1.**

- (3p) a) Să se calculeze  $\hat{3}^{2007}$  în  $\mathbf{Z}_8$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $C_9^3 - C_9^6 + C_8^8$ .
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația  $\log_5 x = -1$ .
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $64^x - 32 = 0$ .
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  să verifice relația  $5^n < 30$ .

**2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^7 + 2x - 1$ .**

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x)dx$ .
- (3p) c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .
- (3p) d) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n} + 3}{5\sqrt{n} - 2}$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  și mulțimea

$$C(A) = \{X \in M_2(\mathbf{C}) \mid XA = AX\}.$$

- (4p) a) Să se calculeze determinantul matricei  $A$ .
- (4p) b) Să se calculeze matricea  $A^2$ .
- (4p) c) Să se determine rangul matricei  $A$ .
- (2p) d) Să se arate că matricea  $A$  este inversabilă și să se calculeze inversa acesteia.
- (2p) e) Să se arate că, dacă  $U, V \in C(A)$ , atunci  $U \cdot V \in C(A)$ .
- (2p) f) Să se arate că, dacă  $X \in C(A)$ , atunci există  $a, b \in \mathbf{C}$  astfel încât  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ .
- (2p) g) Să se arate că, dacă  $Y \in C(A)$  și  $Y^{2007} = O_2$ , atunci  $Y = O_2$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcțiile  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 2 + \arcsin(\sin x)$  și  $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

- (4p) a) Să se verifice că  $f(x + 2\pi) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .
- (4p) c) Să se arate că  $2 - \frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq 2 + \frac{\pi}{2}$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (2p) d) Să se arate că nu există  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .
- (2p) e) Să se arate că orice primitivă a funcției  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- (2p) f) Să se verifice că  $F(x) = 2x + \frac{x^2}{2}$ ,  $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .
- (2p) g) Să se arate că  $F(\sqrt{2006}) < F(\sqrt{2007})$ .

## Varianta 088

### SUBIECTUL I

a) 1. b)  $\sqrt{2}$ . c)  $P = i^{36} = 1$ . d)  $a = -1, b = 3$ . e)  $S = \frac{3}{2}$ . f)  $a = 0, b = 1$ .

### SUBIECTUL II

1.

a)  $\hat{3}^{2006} = (\hat{3}^2)^{1003} = \hat{1}$ . b)  $E = 1$ . c)  $x = 5^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$ . d)  $2^{6x} = 2^5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}$ . e)  $p = \frac{2}{5}$ .

2.

a)  $f'(x) = 7x^6 + 2, x \in \mathbf{R}$ . b)  $\frac{1}{8}$ . c) 2.

d)  $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbf{R}$ , deci funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ . e)  $\frac{2}{5}$ .

### SUBIECTUL III

a)  $\det(A) = -1$ . b)  $A^2 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . c)  $A^2 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . d)  $A^{-1} = A$ .

e) Fie  $U, V \in C(A)$ . Atunci  $(UV)A = U(VA) = U(AV) = (UA)V = (AU)V = A(UV)$ , deci  $UV \in C(A)$ .

f) Fie  $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in C(A)$ . Atunci

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y & x \\ t & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t \\ x & y \end{pmatrix}, \text{ de unde } t = x, z = y, \text{ adică}$$

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}. \text{ Considerăm } a = x, b = y \in \mathbf{C}.$$

g) Se arată că  $X \in C(A), X^2 = O_2 \Rightarrow X = O_2$ . Din  $Y^{2007} = O_2 \Rightarrow Y^{2008} = O_2$  și notând  $Z = Y^{1004} \Rightarrow Z^2 = O_2$ , etc.

### SUBIECTUL IV

a)  $\sin(2k\pi + x) = \sin x$  pentru orice  $x \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z}$ , rezultă

$f(x + 2\pi) = 2 + \arcsin(\sin(x + 2\pi)) = f(x), x \in \mathbf{R}$ . b)  $f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + \frac{\pi}{2}$ .

c)  $2 - \frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq 2 + \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbf{R}$ .

d) Pentru şirul  $x_n = 2n\pi, n \in \mathbb{N}$ , avem că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 2$ , iar pentru şirul  $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{N}$ , avem că  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 2 + \frac{\pi}{4}$ . Atunci nu există  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

e) Deoarece  $F'(x) = f(x) \geq 2 - \frac{\pi}{2} > 0, \forall x \in \mathbf{R}$ , rezultă că funcția  $F$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .

f) Pentru  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  avem  $\arcsin(\sin x) = x \Rightarrow f(x) = 2 + x$ . Cum  $F(0) = 0$ , vom avea  $F(x) = \int_0^x (2+t) dt = 2x + \frac{x^2}{2}$ .

g) Utilizând c), avem că  $f(x) \geq 2 - \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbf{R}$ , deci

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \geq \int_0^x \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) dt = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)x, \forall x \geq 0. \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty.$$