

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D**
**Varianta ....087**

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările  
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**
**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex  $\frac{3+4i}{i}$ .
- (4p) b) Să se determine  $\alpha \in \mathbf{R}$  astfel încât vectorii  $\vec{v} = 3\vec{i} + \alpha \cdot \vec{j}$  și  $\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$  să fie coliniari.
- (4p) c) Să se calculeze aria totală a unui cub care are lungimea diagonalei  $2\sqrt{3}$ .
- (4p) d) Să se determine  $a, b \in \mathbf{R}$ , astfel încât centrul de greutate al triunghiului  $ABC$  cu vârfurile  $A(2, -3)$ ,  $B(a, b)$  și  $C(-3, 2)$  să fie punctul  $O(0,0)$ .
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele  $A(2, -3)$ ,  $B(1, 1)$  și  $C(-3, 2)$ .
- (2p) f) Să se calculeze  $\cos A$  dacă triunghiul  $ABC$  are lungimile laturilor  $AB = 4$ ,  $AC = 6$  și  $BC = 8$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**
**1.**

- (3p) a) Să se rezolve în  $\mathbf{Z}_6$  ecuația  $\hat{5} \cdot \hat{x} = \hat{3}$ .
- (3p) b) Să se calculeze expresia  $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2$ , unde  $x_1, x_2$  sunt rădăcinile ecuației  $x^2 + x + 1 = 0$ .
- (3p) c) Să se determine  $m \in \mathbf{R}$  astfel încât polinomul  $f = X^3 + m$  să se dividă cu polinomul  $g = X - 1$ .
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $16^{-x} - 64 = 0$ .
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $n$  din mulțimea  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  să verifice relația  $n^2 - 2n \leq 0$ .
2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 2^x + 3^x$ .
- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- (3p) c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .
- (3p) d) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n + f(0)}{5n - f(0)}$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

În mulțimea  $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$  se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ și } C = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

- (4p) a) Să se verifice că  $A + I_2 = B$ .
- (4p) b) Să se calculeze determinantul și rangul matricei  $A$ .
- (4p) c) Să se verifice că  $A^2 = A$ .
- (2p) d) Să se calculeze  $A^{2007}$ .
- (2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că  $B^n = I_2 + (2^n - 1)A$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .
- (2p) f) Să se arate că  $aA + bB + cI_2 \neq C$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$ .
- (2p) g) Să se arate că matricea  $X = A^n + B^n$  este inversabilă,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcțiile  $f, g : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ , definite prin  $f(x) = \sin x$  și  $g(x) = \frac{1}{x}$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$  și  $g'(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ .
  - (2p) b) Să se calculeze  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f^2(x) dx$ .
  - (4p) c) Să se calculeze  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g^2(x) dx$ .
  - (4p) d) Să se determine ecuația asymptotei verticale la graficul funcției  $g$ .
  - (2p) e) Să se arate că  $t^2 \sin^2 x - 2t \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{x^2} \geq 0$ ,  $\forall t \in \mathbf{R}$ ,  $\forall x > 0$ .
  - (2p) f) Integrând inegalitatea de la punctul e), să se arate că
- $$t^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x dx - 2t \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{x^2} dx \geq 0, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$
- (2p) g) Să se arate, utilizând eventual punctul f), că
- $$\left( \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \right)^2 \leq \left( \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x dx \right) \cdot \left( \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{x^2} dx \right).$$

## Varianta 087

### SUBIECTUL I

a) 5. b) 6. c) aria cerută este  $6a^2 = 24$ . d)  $a=1, b=1$ . e)  $S = \frac{15}{2}$ .

f)  $8^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos A \Leftrightarrow \cos A = -\frac{1}{4}$ .

### SUBIECTUL II

1.

a)  $x = (\hat{5})^{-1} \cdot \hat{5} = \hat{5} \cdot \hat{3} = \hat{3}$ . b)  $-2$ . c)  $f(1) = 0 \Leftrightarrow m = -1$ . d)  $-4x = 6 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ .

e)  $p = \frac{2}{5}$ .

2.

a)  $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3, x \in \mathbf{R}$ . b)  $\frac{1}{\ln 2} + \frac{2}{\ln 3}$ . c)  $f'(0) = \ln 6$ .

d)  $f'(x) > 0$  pentru orice  $x \in \mathbf{R}$ , deci funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n+2}{5n-2} = \frac{7}{5}$ .

### SUBIECTUL III

a)  $A + I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = B$ . b)  $\det(A) = 0$ ,  $\text{rang}(A) = 1$ .

c) Calcul direct.

d) Deoarece  $A^2 = A$ , avem  $A^3 = A^2 \cdot A = A^2 = A$ , și prin inducție matematică,  $A^n = A, \forall n \in \mathbf{N}^*$ . Rezultă că  $A^{2007} = A, \forall n \in \mathbf{N}^*$ .

e) Fie  $P(n): B^n = I_2 + (2^n - 1)A$ .

$B^{k+1} = B^k \cdot B = (I_2 + (2^k - 1)A)(I_2 + A) = I_2 + (2^{k+1} - 1)A$ , deci și  $P(k+1)$  este adevărată.

f)  $aA + bB + cC = \begin{pmatrix} b+c & 0 \\ a+b & a+2b+c \end{pmatrix} \neq C$ , deoarece  $8 \neq 0$ .

g)  $A^n = A, \forall n \in \mathbf{N}^*$ . Cum  $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ , prin inducție matematică se arată

că  $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbf{N}^*$ . Atunci  $\det(X) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2^n & 2^n + 1 \end{vmatrix} = 2^n + 1 \neq 0$ , deci matricea  $X$  este inversabilă.

### SUBIECTUL IV

- a)  $f'(x) = \cos x, g'(x) = -\frac{1}{x^2}, x \in (0, \infty)$ .
- b) Integrând prin părți, obținem  $I = \frac{\pi}{4}$ . c)  $\frac{1}{\pi}$ .
- d)  $x = 0$  este asimptotă verticală la dreapta.
- e) Inegalitatea se scrie echivalent  $\left(t \sin x - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0$ , relație adevărată  $\forall t \in \mathbf{R}, x > 0$ .
- f) Din e) avem că  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(t^2 \sin^2 x - 2t \cdot \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx \geq 0$  și cu proprietatea de liniaritate a integralei definite obținem inegalitatea dorită.
- g) Trinomul de gradul doi de la f) fiind pozitiv pentru orice  $t \in \mathbf{R}$ , avem  $\Delta \leq 0$ , de unde obținem inegalitatea dorită.