

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta086

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- | **La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

SUBIECTUL I (20p)

Se consideră mulțimea M formată din punctele $A(1,1)$, $B(1,-1)$, $C(-1,2)$ și $O(0,0)$.

- (4p) a) Să se calculeze lungimea segmentului $[OC]$.
- (4p) b) Să se calculeze aria triunghiului ABC .
- (4p) c) Să se determine raza cercului de ecuație $x^2 + y^2 = 2$.
- (4p) d) Să se calculeze probabilitatea ca alegând un punct din mulțimea M acesta să aparțină cercului de ecuație $x^2 + y^2 = 2$.
- (2p) e) Să se determine coordonatele vectorului \overrightarrow{AB} .
- (2p) f) Să se calculeze partea reală a numărului complex $(1+2i)^2$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se rezolve în \mathbf{R} ecuația $2^{x^2+x} = 4$.
 - (3p) b) Să se calculeze a_7 , dacă în progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ se cunosc $a_1 = 1$ și $a_3 = 5$.
 - (3p) c) Să se calculeze $C_7^5 - C_7^2$.
 - (3p) d) Să se arate că numărul $a = \log_2 \frac{1}{4} + \log_2 8$ este natural.
 - (3p) e) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât restul împărțirii polinomului $X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 4X + a$ la polinomul $X - 1$ să fie 2.
2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{e^x}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
 - (3p) b) Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției f .
 - (3p) c) Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției f .
 - (3p) d) Să se calculeze $\int_0^1 f(-x)dx$.
 - (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

Varianta 086

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = A - I_3$.

- (4p) a) Să se demonstreze că $\det(A) = \det(B)$.
- (4p) b) Să se calculeze rangurile matricelor A și B .
- (4p) c) Să se calculeze B^2 și B^3 .
- (2p) d) Să se demonstreze, folosind metoda inducției matematice, că

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \forall n \in \mathbf{N}^*$$
.
- (2p) e) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât $A^2 = I_3 + a \cdot B + b \cdot B^2$.
- (2p) f) Să se demonstreze că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, există $k \in \mathbf{N}$ astfel încât $A^n = I_3 + B + B^2 + \dots + B^k$.
- (2p) g) Se consideră $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Să se demonstreze că nu există $p \in \mathbf{N}$ astfel încât $A + A^2 + \dots + A^n = I_3 + B + B^2 + \dots + B^p$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f_k : \left(-\frac{e}{k}, \infty\right) \rightarrow \mathbf{R}$, $f_k(x) = \ln(e+kx)$, unde $k \in \mathbf{N}^*$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'_k(x)$, $x \in \left(-\frac{e}{k}, \infty\right)$.
- (4p) b) Să se demonstreze că $\lim_{x \rightarrow 0} f_k(x) = 1$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$.
- (4p) c) Să se demonstreze că $1 - ab = 1 - a + a(1 - b)$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se demonstreze că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_k(x) - 1}{x} = \frac{k}{e}$, $\forall k \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) e) Să se arate că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - f_1(x)f_2(x)}{x} = -\frac{3}{e}$.
- (2p) f) Să se demonstreze că dacă $n \in \mathbf{N}^*$ și $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}$, atunci

$$1 - a_1a_2\dots a_n = 1 - a_1 + a_1(1 - a_2) + a_1a_2(1 - a_3) + \dots + a_1a_2\dots a_{n-1}(1 - a_n)$$
.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \ln(e+x)\ln(e+2x)\dots\ln(e+nx)}{x}$, unde $n \in \mathbf{N}^*$.

Varianta 086

SUBIECTUL I

- a) $OC = \sqrt{5}$. b) 2. c) Centrul este $O(0,0)$ și raza $r = \sqrt{2}$. d) $p = \frac{1}{2}$.
e) $\overrightarrow{AB}(0,-2)$. f) $\operatorname{Re}(1+2i)^2 = \operatorname{Re}(-3+4i) = -3$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $x^2 + x = 2 \Leftrightarrow x \in \{1, -2\}$. b) $a_7 = 13$. c) 0. d) 1.

- e) Dacă $f = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 4X + a$, atunci restul este $r = f(1)$. Rezultă $2 = a - 2 \Leftrightarrow a = 4$.

2.

- a) $f'(x) = (x \cdot e^{-x})' = (1-x) \cdot e^{-x}, x \in \mathbf{R}$. b) 1. c) 1. d) -1. d) 0.

SUBIECTUL III

a) $\det(A) = 0$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, deci $\det(B) = 0$.

b) $\operatorname{rang}(A) = 2$, $\operatorname{rang}(B) = 2$. c) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$.

d) Pentru $n=1$ afirmația este adevărată. Presupunem că afirmația este adevărată pentru $n=k$, $k \in \mathbf{N}^*$, și o demonstrăm pentru $n=k+1$. Avem

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 2^k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^k & 0 & 2^k \end{pmatrix},$$

adică afirmația este adevărată și pentru $n=k+1$.

e) $I_3 + aB + bB^2 = A^2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+b & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a=2$ și $b=1$.

f) Din c) rezultă că $B^3 = B$, $B^4 = B^2$, $B^5 = B$. Atunci $B^{2n} = B^2$, $B^{2n+1} = B$, $n \in \mathbf{N}^*$.

Considerăm $k = 2m+1$, $m \in \mathbf{N}$. Atunci egalitatea $A^n = I_3 + B + B^2 + \dots + B^k$ revine la

$A^n = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & m+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ m+1 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$, de unde obținem $2^{n-1} = m+1$ cu $m = 2^{n-1} - 1$. Deci pentru

orice $n \in \mathbb{N}^*$ există $k = 2^n - 1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $A^n = I_3 + B + B^2 + \dots + B^k$.

g) Avem că $\sum_{k=1}^n A^k = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & n & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, unde $\alpha = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$. Cum

elementul de pe poziția (2,2) din matricea B^k ($k \in \mathbb{N}$) este 0, vom deduce că

elementul de pe aceeași poziție din matricea $\sum_{k=0}^p B^k$ este 1. Cum $n \geq 2$, cei doi membri nu pot fi egali.

SUBIECTUL IV

a) $f'_k(x) = \frac{k}{e+kx}$, $x \in \left(-\frac{e}{k}, \infty\right)$. b) 1. c) $1 - a + a(1-b) = 1 - a + a - ab = 1 - ab$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_k(x) - 1}{x} = f'_k(0) = \frac{k}{e}$. e) Utilizând c) și d) avem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - f_1(x) \cdot f_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - f_1(x)}{x} + \frac{f_1(x) \cdot (1 - f_2(x))}{x} \right) = \frac{-1}{e} - \frac{2}{e} = -\frac{3}{e}.$$

f) Efectuând înmulțirile din membrul drept, acesta devine

$$1 - a_1 + (a_1 - a_1 a_2) + (a_1 a_2 - a_1 a_2 a_3) + \dots + (a_1 a_2 \dots a_{n-1} - a_1 a_2 \dots a_n) = \\ = 1 - a_1 a_2 \dots a_n, \text{ adică are loc egalitatea cerută.}$$

g) Utilizând f) și d), limita cerută devine

$$L_n = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - f_1(x)}{x} + \frac{f_1(x)(1 - f_2(x))}{x} + \dots + \frac{f_1(x)f_2(x)\dots f_{n-1}(x)(1 - f_n(x))}{x} \right] = \\ = \frac{-1}{e} - \frac{2}{e} - \dots - \frac{n}{e} = \frac{-n(n+1)}{2e}.$$