

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta085

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2), B(2,0), C(0,4)$.

- (4p) a) Să se calculeze distanța de la punctul C la dreapta AB .
- (4p) b) Să se determine ecuația medianei din A a triunghiului ABC .
- (4p) c) Să se calculeze $\cos(A\hat{O}B)$.
- (4p) d) Să se calculeze $\cos 2x$, dacă $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- (2p) e) Să se calculeze lungimea vectorului \overrightarrow{AC} .
- (2p) f) Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$, folosind eventual egalitatea $\sin 2t = 2 \sin t \cdot \cos t$, adevărată pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se determine a_6 dacă în progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ se cunosc $a_2 = 5$ și $a_5 = 14$.
- (3p) b) Să se determine toate numerele întregi m care verifică relația $|2m - 1| \leq 4$.
- (3p) c) Să se determine câte polinoame de gradul al doilea au toți coeficienții în mulțimea $\{0,3,6,9\}$.
- (3p) d) Să se calculeze probabilitatea ca un element x al mulțimii $\{0,3,6,9\}$ să fie soluție a ecuației $\sqrt{x-2} = 4 - x$.
- (3p) e) Să se determine care dintre mulțimile următoare sunt părți stabile ale mulțimii \mathbf{R} în raport cu operația de înmulțire a numerelor reale: $A = \{2n + 1 | n \in \mathbf{Z}\}$ sau $B = [0,2]$.

2. Se consideră funcția $f : \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{4x^2 - 1}$.

- (3p) a) Să se verifice că $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right)$, $\forall x > \frac{1}{2}$.
- (3p) b) Să se arate că $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(1) + f(2) + \dots + f(n)]$.
- (3p) d) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^{\sqrt{2}} 8x \cdot f(x) dx$.

Descarcă de pe site-ul ebacalaureat.ro

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

Varianta 085

SUBIECTUL III (20p)

Se știe că pentru orice număr real x are loc egalitatea $x = [x] + \{x\}$ (adică suma dintre partea sa întreagă și partea sa fracționară). Pe \mathbf{R} se definește legea de compozиie "∧" prin $a \wedge b = a + [b]$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$.

- (4p) a) Să se arate că $[x+k] = [x] + k$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall k \in \mathbf{Z}$.
- (4p) b) Să se calculeze $A = \left(\frac{2}{3} \wedge \frac{3}{2}\right) \wedge \frac{4}{3}$ și $B = \frac{2}{3} \wedge \left(\frac{3}{2} \wedge \frac{4}{3}\right)$.
- (4p) c) Să se arate că legea "∧" este asociativă.
- (2p) d) Să se arate că legea "∧" nu este comutativă.
- (2p) e) Să se arate că nu există $e \in \mathbf{R}$ astfel încât $a \wedge e = e \wedge a = a$, $\forall a \in \mathbf{R}$.
- (2p) f) Să se determine numerele $c \in \mathbf{R}$ pentru care $(c \wedge c) \wedge c = c$.
- (2p) g) Să se determine mulțimile finite $H \subset \mathbf{Z}$ pe care "∧" este lege de compozиie.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, g : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x - \ln x$, $g(x) = \cos 2\pi x$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$ și $g'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (4p) b) Să se arate că funcția f este convexă pe $(0, \infty)$.
- (4p) c) Să se arate că $f(x) \geq 1$, $\forall x \in (0, \infty)$.
- (2p) d) Să se rezolve ecuația $f(x) = g(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (2p) e) Să se calculeze aria suprafeței plane mărginită de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - g(x)}{x^2}$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n)$.

Varianta 085

SUBIECTUL I

a) 2. b) Dacă P este mijlocul segmentului BC $P(1,2) \Rightarrow AP : y = 2$.

c) $\cos(\angle AOB) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. d) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 0$. e) $2\sqrt{2}$. f) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $a_6 = 17$. b) $m \in \{-1, 0, 1, 2\}$.

c) există $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ polinoame. d) $p = \frac{1}{4}$.

e) Mulțimea B nu este parte stabilă, căci $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in B$, dar $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} \notin B$. Cum produsul a două numere impare este tot un număr impar, mulțimea A este parte stabilă față de înmulțire.

2.

a) $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) = \frac{2x+1-(2x-1)}{2(2x-1)(2x+1)} = \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = f(x), \forall x > \frac{1}{2}$.

b) Utilizând a) avem

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(k) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right), \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

c) $\frac{1}{2}$. d) $f'(x) = \frac{-1}{(2x-1)^2} + \frac{1}{(2x+1)^2}, x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. e) $\ln \frac{7}{3}$.

SUBIECTUL III

a) Fie $x = [x] + \{x\}$.

Atunci $[x+k] = [[x]+k+\{x\}] = [x]+k, \forall x \in \mathbf{R}, \forall k \in \mathbf{Z}$.

b) $A = \left(\frac{2}{3} + 1\right) \wedge \frac{4}{3} = \frac{2}{3} + 1 + 1 = \frac{8}{3}; B = \frac{2}{3} \wedge \left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{2}{3} \wedge \frac{5}{2} = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$.

c) Pentru orice $a, b, c \in \mathbf{R}$, utilizând a) avem: $(a \wedge b) \wedge c = (a + [b]) \wedge c = a + [b] + [c]$ și $a \wedge (b \wedge c) = a \wedge (b + [c]) = a + [b + [c]] = a + [b] + [c]$, de unde rezultă că legea este asociativă.

d) $\frac{1}{2} \wedge \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \neq \left(\frac{1}{5} \wedge \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5}$.

e) Presupunând contrariul, din

$e \wedge a = a, \forall a \in \mathbf{R} \Rightarrow e + [a] = a, \forall a \in \mathbf{R} \Rightarrow e = \{a\}, \forall a \in R$, adică e depinde de a , contradicție.

f) $(c \wedge c) \wedge c = c \Leftrightarrow (c + [c]) \wedge c = c \Leftrightarrow c + 2[c] = c \Leftrightarrow c \in [0,1]$.

g) $H = \{0\}$ este soluție.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}, g'(x) = -2\pi \sin 2\pi x, x \in (0, \infty)$.

b) $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in (0, \infty)$, deci funcția f este convexă pe $(0, \infty)$.

c) Din a) $\Rightarrow f'(x) < 0$ pentru orice $x \in (0, 1)$, $f'(1) = 0$, și $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (1, \infty)$. Atunci $f(x) \geq f(1) = 1, \forall x \in (0, \infty)$.

d) Deoarece $g(x) \in [-1, 1], \forall x \in (0, \infty)$, utilizând c), ecuația devine

$$f(x) = 1 = g(x) \Leftrightarrow x = 1.$$

e) Aria este $\frac{e^2 - 3}{2} \cdot f) 2\pi^2 \cdot g) \lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos 2\pi n = 1$.