

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta084

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex $2i$.
- (4p) b) Să se calculeze lungimea ipotenuzei într-un triunghi dreptunghic cu catetele de lungimi 5 și 12.
- (4p) c) Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6}$.
- (4p) d) Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{w} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$.
- (2p) e) Să se determine $\alpha > 0$ astfel încât aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(5, -2)$, $B(\alpha, \alpha)$ și $C(4, -2)$ să fie 2.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc egalitatea de numere complexe

$$\frac{3+i}{3i-1} = a+bi.$$

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze \hat{s}^{2007} în \mathbf{Z}_8 .
- (3p) b) Să se calculeze $\frac{C_8^5}{C_8^3}$.
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_5 x + \log_5 3 = 2$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x + 2^x = 6$.
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $\sqrt{n} < 2$.

 2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.
- (3p) c) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx$.
- (3p) d) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-2, 2)$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{n} + 1}{2\sqrt{n} - 1}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (4p) a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
- (4p) b) Să se calculeze matricele A^2 și A^3 .
- (4p) c) Să se verifice că $A^3 + A^2 + A = O_3$.
- (2p) d) Să se găsească o matrice $B \in M_3(\mathbf{R})$, $B \neq O_3$, cu proprietatea $AB = BA = O_3$.
- (2p) e) Să se arate că $A^4 = A$.
- (2p) f) Să se calculeze A^{2007} .
- (2p) g) Să se arate că $I_3 \neq aA + bA^2 + cA^3$, $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 2) - \ln(x^2 + 1)$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- (4p) c) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ și strict descrescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.
- (2p) d) Să se arate că $0 < f(x) \leq \ln 2$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (2p) f) Să se arate că $\int_0^x \ln(t^2 + a^2) dt = x \ln(x^2 + a^2) - 2x + 2a \cdot \arctg \frac{x}{a}$,
 $\forall x \in \mathbf{R}, \forall a \in \mathbf{R}^*$.
- (2p) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

Varianta 084

SUBIECTUL I

a) $|2i| = 2$. b) 13 . c) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. d) 1 . e) $\alpha = 4$. f) $a = 0, b = -1$.

SUBIECTUL II

1.

a) $\hat{5}^2 = \hat{1} \Rightarrow \hat{5}^{2007} = (\hat{5}^2)^{1003} \cdot \hat{5} = \hat{5}$. b) $E = 1$. c) $\frac{25}{3}$. d) $x = 1$. e) $p = \frac{3}{5}$.

2.

a) $f'(x) = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}, \forall x \in \mathbf{R}$. b) $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{4}$. c) $\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \arctg \frac{1}{2} \right)$.

d) $f'(x) > 0$ pentru $x \in (-2, 2)$, f este strict crescătoare pe $(-2, 2)$. e) $\frac{3}{2}$.

SUBIECTUL III

a) $\det(A) = 0$, $\text{rang}(A) = 2$. b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Se verifică prin calcul direct.

d) Din relația de la c), rezultă că $A(A^2 + A + I_3) = (A^2 + A + I_3)A = O_3$. Atunci alegem $B = A^2 + A + I_3, B \neq O_3$.

e) Utilizând b) $\Rightarrow A^4 = A$. f) $A^{2007} = A^{3 \cdot 669} = A^3$.

g) $\det(a \cdot A + b \cdot A^2 + c \cdot A^3) = 0 \neq 1 = \det(I_3)$, $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = \frac{2x}{x^2+2} - \frac{2x}{x^2+1}, x \in \mathbf{R}$. b) 0 .

c) Din a) rezultă că $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)(x^2+2)}, x \in \mathbf{R}$. Atunci $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (-\infty, 0)$, $f'(0) = 0$ și $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$. Așadar funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{x^2+2}{x^2+1} \right) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x^2+2}{x^2+1} \right) = 0$, utilizând c) rezultă că $0 < f(x) \leq f(0) = \ln 2, \forall x \in \mathbf{R}$. e) 0 .

f) Folosind metoda integrării prin părți, avem

$$\begin{aligned}\int_0^x \ln(t^2 + a^2) dt &= t \ln(t^2 + a^2) \Big|_0^x - 2 \int_0^x \frac{t^2}{t^2 + a^2} dt = \\ &= x \ln(x^2 + a^2) - 2 \left(t - a \cdot \arctg \frac{t}{a} \right) \Big|_0^x = x \ln(x^2 + a^2) - 2x + 2a \cdot \arctg \frac{x}{a}.\end{aligned}$$

g) Aria este : $\ln \frac{3}{2} + 2\sqrt{2} \cdot \arctg \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{2}$.