

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta ...083

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,3), B(-1,4)$ și $C(3,0)$.

- (4p) a) Să se calculeze partea reală a numărului complex $(-2+3i)(-1+4i)$.
- (4p) b) Să se calculeze aria triunghiului ABC .
- (4p) c) Să se calculeze distanța dintre punctele A și B .
- (4p) d) Să se afle coordonatele centrului de greutate G al triunghiului ABC .
- (2p) e) Să se determine $a,b \in \mathbb{R}$ dacă dreapta de ecuație $ax + by + 5 = 0$ conține punctele A și B .
- (2p) f) Să se calculeze $\sin(A\hat{B}C)$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se determine numerele reale x pentru care $2007^{2x^2-1} = 2007^7$.
- (3p) b) Să se determine probabilitatea ca un element x din mulțimea $A = \{1,2,3,4\}$ să fie soluție a ecuației $\log_2(1+x) = 2$.
- (3p) c) Să se arate că $\frac{1}{x(x+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right)$, $\forall x \in (0, \infty)$.
- (3p) d) Să se arate că $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{2004 \cdot 2007} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2007}\right)$.
- (3p) e) Să se determine primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ dacă $\begin{cases} b_2 - b_1 = 4 \\ b_3 - b_1 = 16 \end{cases}$.
2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = 2007^x$ și $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \log_{2007} x$.
- (3p) a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.
- (3p) c) Să se calculeze $(f \circ g)(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (3p) d) Să se arate că funcția f este convexă pe $[0, \infty)$.
- (3p) e) Să se determine soluțiile ecuației $(f \circ g)(x) = 4x^3$, $x > 0$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbb{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (4p) a) Să se calculeze A^2 .
- (4p) b) Să se arate că $\det A = \det B$.
- (4p) c) Să se calculeze $A \cdot B - B \cdot A$.
- (2p) d) Să se arate că matricea A este inversabilă și să se calculeze inversa acesteia.
- (2p) e) Să se determine matricea $X \in M_2(\mathbb{C})$ pentru care $A \cdot X = B$.
- (2p) f) Să se determine rangul matricei $Y = B + B^2 + \dots + B^{2007}$.
- (2p) g) Să se determine toate matricele $X \in M_2(\mathbb{C})$ pentru care $X \cdot A = B \cdot X$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1,3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x-4}{x^2-4x+3}$ și se definesc sirurile $(a_n)_{n \geq 4}$

prin $a_n = f(4) + f(5) + \dots + f(n)$ și $(b_n)_{n \geq 4}$ prin $b_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}$.

- (4p) a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (4p) b) Să se calculeze $f(x) - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,3\}$.
- (4p) c) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1,3\}$.
- (2p) d) Să se arate că f este strict descrescătoare pe intervalul $(3, \infty)$.
- (2p) e) Să se determine ecuațiile asymptotelor verticale la graficul funcției f .
- (2p) f) Să se calculeze $\int_{2007}^{2008} f(x) dx$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2b_n)$.

Varianta 083

SUBIECTUL I

a) -10. b) $S = 4$. c) $AB = \sqrt{2}$. c) $G\left(0, \frac{7}{3}\right)$. e) $a = 1, b = -1$. f) $\sin A\hat{B}C = 1$.

SUBIECTUL II

1.

a) Convine $2x^2 - 1 = 7 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x \in \{-2, 2\}$. b) $p = \frac{1}{4}$.

c) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right) = \frac{x+3-x}{3x(x+3)} = \frac{1}{x(x+3)}, \forall x \in (0, \infty)$.

d) Utilizând c) avem

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{2004 \cdot 2007} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2004} - \frac{1}{2007}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2007}\right)$$

e) $q = 3$ și $b_1 = 2$.

2.

a) Limita cerută este $f'(1) = 2007 \cdot \ln 2007$.

b) $\int_1^2 2007^x dx = \frac{2007^x}{\ln 2007} \Big|_1^2 = \frac{2007 \cdot 2006}{\ln 2007}$.

c) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2007^{g(x)} = 2007^{\log_{2007} x} = x, \forall x \in (0, \infty)$.

d) $f'(x) = 2007^x \cdot \ln 2007, f''(x) = 2007^x \cdot \ln^2 2007 > 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ este convexă pe \mathbf{R} , deci va fi convexă și pe $[0, \infty)$. e) Utilizând c), ecuația devine

$$4x^3 = x \Leftrightarrow x(4x^2 - 1) = 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x = \frac{1}{2}.$$

SUBIECTUL III

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. b) $\det(A) = 1 = \det(B)$.

c) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB - BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

e) Cum A este inversabilă, $A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

f) Prin calcul obținem $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Prin inducție matematică se

demonstrază că $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbf{N}^*$. Rezultă că

$$\det(Y) = \begin{vmatrix} 2007 & 2+4+\dots+2 \cdot 2007 \\ 0 & 2007 \end{vmatrix} = 2007^2.$$

g) Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, atunci $XA = BX \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a-b & a \\ 2c-d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow d=c$ și $b=a-2c$, deci $X = \begin{pmatrix} a & a-2c \\ c & c \end{pmatrix}$, $a, c \in \mathbf{C}$.

SUBIECTUL IV

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

b) $f(x) - \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} \right) = f(x) - \frac{2x-4}{(x-1)(x-3)} = 0, x \in \mathbf{R} \setminus \{1, 3\}$.

c) Din b) avem $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-3)^2}, x \in \mathbf{R} \setminus \{1, 3\}$.

d) Din c) rezultă că $f'(x) < 0$ pentru $x \in (3, \infty)$, deci funcția f este strict descrescătoare pe $(3, \infty)$.

e) Funcția f este continuă pe $\mathbf{R} \setminus \{1, 3\}$, și $f_d(1) = \infty, f_d(3) = \infty, f_s(1) = -\infty = f_s(3)$. Dreptele $x=1$ și $x=3$ sunt asymptote verticale ale graficului funcției f .

f) $\int_{2007}^{2008} f(x) dx = \int_{2007}^{2008} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} \right) dx = (\ln(x-1) + \ln(x-3)) \Big|_{2007}^{2008} = \ln \frac{2007 \cdot 2005}{2006 \cdot 2004}$.

g) Utilizând b) avem

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=4}^n \left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-3} \right) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-3} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \dots + \frac{2}{n-3} \right) + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} = \\ &= \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + 2b_n - \frac{2}{n-2} - \frac{2}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}. \end{aligned}$$

Rezultă $a_n - 2b_n = \frac{13}{6} - \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n}$, $n \geq 4$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2b_n) = \frac{13}{6}$.