

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta082

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate xOy , se consideră punctele $A_n(n,0)$ și $B_n(0,n)$, unde

$n \in \{1,2,3,4\}$ și se notează cu M mulțimea formată din toate aceste 8 puncte.

- (4p) a) Să se calculeze distanța dintre punctele A_4 și B_3 .
- (4p) b) Să se determine ecuația dreptei A_2B_4 .
- (4p) c) Să se determine ecuația paralelei prin B_2 la dreapta A_2B_4 .
- (4p) d) Să se calculeze aria triunghiului $A_1A_3B_3$.
- (2p) e) Să se calculeze $\sin(A_1\hat{A}_3B_3)$.
- (2p) f) Să se calculeze câte drepte distincte determină toate punctele mulțimii M .

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze $a+b$ dacă numerele $1, a, 3, b, 5$ sunt, în această ordine, în progresie aritmetică.
- (3p) b) Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\frac{(n+5)!}{(n+4)!} = 10$.
- (3p) c) Să se rezolve în \mathbb{Z}_7 ecuația $\hat{3} \cdot \hat{x} = \hat{4}$.
- (3p) d) Să se calculeze numărul funcțiilor $f : \{3,4,5\} \rightarrow \{3,4,5\}$ pentru care $f(4)$ este număr impar.
- (3p) e) Să se calculeze în câte feluri se poate alcătui o echipă de cercetare formată din 3 specialiști, dintre care cel puțin un biolog și un chimist, dacă avem la dispoziție 3 biologi și 4 chimici.

2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (3p) b) Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f .
- (3p) c) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.
- (3p) d) Să se determine cel mai mare dintre numerele $a = f(\sqrt{3})$ și $b = f(\sqrt{5})$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

Varianta 082

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (4p) a) Să se calculeze AB și BA .
- (4p) b) Să se calculeze determinantul matricei A .
- (4p) c) Să se determine rangul matricei A .
- (2p) d) Să se verifice că $A^2 = B^2 = I_3$.
- (2p) e) Să se arate că matricea A este inversabilă și să se determine inversa acesteia.
- (2p) f) Să se calculeze determinantul matricei $X = A + A^2 + \dots + A^{2007}$.
- (2p) g) Să se arate că $(AB)^n \neq I_3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$.

- (4p) a) Să se verifice că $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$, $\forall x \in [0, \infty)$.
- (4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (4p) c) Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- (2p) d) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.
- (2p) e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) + f(2) + \dots + f(n))$.
- (2p) g) Folosind eventual punctul d), să se arate că $\int_0^1 \frac{x^3}{(x+1)(x+2)} dx \leq \frac{1}{8}$.

Varianta 82

SUBIECTUL I

a) 5. b) $A_2B_4 : \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x + 2y - 8 = 0$. c) $2x + y - 2 = 0$. d) 3. e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. f) 18 .

SUBIECTUL II

1.

a) Din $2a = 1 + 3, 2b = 3 + 5 \Rightarrow a = 2, b = 4 \Rightarrow a + b = 6$. b) $n + 5 = 10 \Leftrightarrow n = 5$.

c) $x = \hat{3}^{-1} \cdot \hat{4} = \hat{5} \cdot \hat{4} = \hat{6}$. d) Există $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ funcții.

e) Echipa se poate forma în $C_3^1 \cdot C_4^2 + C_3^2 \cdot C_4^1 = 30$ moduri.

2.

a) $f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4} = \frac{-x^2 + 2x - 3}{x^4}, x \in (0, \infty)$.

b) $y = 0$ este asymptotă orizontală spre ∞ , $x = 0$ este asymptotă verticală la drepta.

c) Din a) rezultă că $f'(x) < 0$ pentru $x \in (0, \infty)$. Atunci f este strict descrescătoare

pe $(0, \infty)$. d) Utilizând c), din $0 < \sqrt{3} < \sqrt{5} \Rightarrow f(\sqrt{3}) > f(\sqrt{5}) \Rightarrow a > b$. e) $\ln 2 - \frac{1}{8}$.

SUBIECTUL III

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) $\det A = -1$. c) $\text{rang}(A) = 3$.

d) Calcul direct.

e) Din d) avem că $A \cdot A = I_3$, deci matricea A este inversabilă și $A = A^{-1}$.

f) Folosind d) avem că $A^{2n} = I_3, A^{2n+1} = A, n \in \mathbb{N}^*, \det(X) = -2007^2$.

g) $(AB)^2 = \begin{pmatrix} 7 & 16 & 0 \\ 24 & 55 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Prin inducție matematică se demonstrează că

$$(AB)^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n & 0 \\ z_n & t_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x_n, y_n, z_n, t_n > 0, \text{ deci } (AB)^n \neq I_3.$$

SUBIECTUL IV

a) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = f(x), \forall x \in [0, \infty)$.

b) $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{-2x-3}{(x+1)^2(x+2)^2}, \forall x \in [0, \infty)$.

c) Utilizând a), limita cerută este 0. d) $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

e) Din b) avem că $f' < 0$, deci funcția f este strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.

f) $\ln \frac{4}{3}$.

g) $f(1) \leq f(x) \leq f(0)$, $\forall x \in [0,1] \Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{2}$, $\forall x \in [0,1]$, deci

$$\int_0^1 \frac{x^3}{(x+1) \cdot (x+2)} dx \leq \int_0^1 x^3 \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{x^4}{8} \Big|_0^1 = \frac{1}{8}.$$