

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta080

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(2,2)$ și $B(2,0)$.

- (4p) a) Să se calculeze distanța dintre punctele O și A .
- (4p) b) Să se scrie ecuația cercului cu centru în O și raza OA .
- (4p) c) Să se calculeze $\cos(OAB)$.
- (4p) d) Să se verifice că punctul $C(4,4)$ aparține cercului de ecuație $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$.
- (2p) e) Să se calculeze modulul numărului $\frac{3-4i}{5}$.
- (2p) f) Să se calculeze partea reală a numărului $\left(\frac{3-4i}{5}\right)^2$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pe \mathbf{R} se consideră legea de compozitie $x * y = 2xy - 2x - 2y + 3$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.

- (3p) a) Să se calculeze $\frac{3}{4} * \frac{1}{2}$.
- (3p) b) Să se determine elementul neutru al legii „*”.
- (3p) c) Să se determine simetricul numărului 4 în raport cu legea „*”.
- (3p) d) Să se determine numerele reale x pentru care $(2^x) * (4^x) = 1$.
- (3p) e) Să se arate că mulțimea $\mathbf{Q} - \mathbf{Z}$ nu este parte stabilă a lui \mathbf{R} în raport cu legea „*”.
2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^4 + 2x^2 + x + 1$.
- (3p) a) Să se calculeze $f(-1)$.
- (3p) b) Să se determine numărul real a pentru care $f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + a$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (3p) c) Să se arate că $f(x) \geq \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (3p) d) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ și mulțimea

$$M = \left\{ C(x) = xA + B \mid x \in \mathbf{R}^* \right\}.$$

- (4p) a) Să se calculeze $\det(A)$ și $\text{rang}(A)$.
- (4p) b) Să se calculeze A^2 , B^2 și să se arate că $AB=BA$.
- (4p) c) Arătați că mulțimea M este parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{C})$ în raport cu înmulțirea matricelor.
- (2p) d) Să se arate că $C(x) \cdot C(y) = C(y) \cdot C(x)$, $\forall C(x), C(y) \in M$.
- (2p) e) Să se arate că toate matricele din M sunt inversabile și să se calculeze $(C(2))^{-1}$.
- (2p) f) Să se arate că ecuația $A \cdot X = B$ nu are soluții în $M_2(\mathbf{C})$.
- g) Folosind metoda inducției matematice, să se arate că
- (2p) $C^n(x) = C(x^n)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall C(x) \in M$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = x(1+x)^n$, $n \in \mathbf{N}^*$ și se definește sirul

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx, n \in \mathbf{N}^*.$$

- (4p) a) Să se calculeze $f'_n(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f_n(x) - f_n(-1)}{x+1}$.
- (4p) c) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f_2 și să se precizeze natura lor.
- (2p) d) Să se studieze monotonia sirului $(I_n)_{n \geq 1}$.
- (2p) e) Să se calculeze $\int_0^1 (1+x)^n dx$.
- (2p) f) Să se arate că $f_n(x) = x \cdot C_n^0 + x^2 \cdot C_n^1 + x^3 \cdot C_n^2 + \dots + x^{n+1} \cdot C_n^n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) g) Să se demonstreze egalitatea $\frac{C_n^0}{2} + \frac{C_n^1}{3} + \dots + \frac{C_n^n}{n+2} = \frac{n \cdot 2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Varianta 080

SUBIECTUL I

a) $2\sqrt{2}$. b) $x^2 + y^2 = 8$. c) $\cos(O\hat{A}B) = \frac{AB}{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) Relația $4^2 + 4^2 - 4 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = 0$ este adevărată. e) 1. f) $-\frac{7}{25}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $\frac{3}{4} * \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$. b) $e = \frac{3}{2}$ este element neutru. c) deci simetricul lui 4 este $\frac{13}{2}$.

d) Ecuația se scrie: $2(2^x - 1)(4^x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0\}$.

e) Avem că $\frac{5}{2} \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$, $\frac{7}{3} \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$, dar $\frac{5}{2} * \frac{7}{3} \notin \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$.

2.

a) $f(-1) = 3$. b) $a = \frac{1}{2}$.

c) Avem $f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$. d) $f'(x) = 4x^3 + 4x + 1$, $x \in \mathbf{R}$.

e) $\frac{41}{30}$.

SUBIECTUL III

a) $\det(A) = 0$, rang(A) = 1. b) $A^2 = A$, $B^2 = B$, $AB = O_2 = BA$.

c) $C(x), C(y) \in M \Rightarrow C(x) \cdot C(y) = (xA + B)(yA + B) = xyA + B = C(xy) \in M$, căci $xy \in \mathbf{R}^*$, iar $M \subset M_2(\mathbf{C})$.

d) $C(x) \cdot C(y) = C(x \cdot y) = C(y \cdot x) = C(y) \cdot C(x)$, $\forall C(x), C(y) \in M$.

e) $C(x) \in M \Rightarrow C(x) = \begin{pmatrix} -x+2 & -2x+2 \\ x-1 & 2x-1 \end{pmatrix}$, de unde $\det C(x) = x \neq 0$.

Avem $C(2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, de unde $(C(2))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

f) $A \cdot X = B$ nu are soluții în $M_2(\mathbf{C})$. g) Pentru $n=1$ egalitatea este adevărată.

Presupunem că are loc egalitatea $C^k(x) = C(x^k)$, $k \in \mathbf{N}^*$.

Atunci $C^{k+1}(x) = C^k(x) \cdot C(x) = C(x^k) \cdot C(x) = C(x^k \cdot x) = C(x^{k+1})$, adică egalitatea

este adevărată și pentru $n = k + 1$. Astfel $C^n(x) = C(x^n)$, $n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV

- a) $f'_n(x) = ((n+1)x+1) \cdot (1+x)^{n-1}$, $x \in \mathbf{R}$. b) 0.
 c) $x = -1$ este punct de maxim local, iar $x = -\frac{1}{3}$ este punct de minim local.
 d) Avem

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (f_{n+1}(x) - f_n(x)) dx = \int_0^1 x^2 (1+x)^n dx \geq 0,$$

deoarece $x^2 (1+x)^n \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$, deci sirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este crescător.

e) $\int_0^1 (1+x)^n dx = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$

f) Utilizând binomul lui Newton, avem

$$f_n(x) = x \cdot \sum_{k=0}^n C_n^k x^k = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{k+1}, \forall n \in \mathbf{N}^*, x \in \mathbf{R},$$

adică are loc concluzia.

g) Integrând egalitatea de la f) avem

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n C_n^k x^{k+1} \right) dx = \left(\sum_{k=0}^n C_n^k \frac{x^{k+2}}{k+2} \right) \Big|_0^1 = \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+2}.$$

Pe de altă parte

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \left((1+x)^{n+1} - (1+x)^n \right) dx = \left(\frac{(1+x)^{n+2}}{n+2} - \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_0^1 = \frac{n \cdot 2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)}.$$

Așadar obținem egalitatea dorită.