

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta079

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze $a + 2b$ dacă punctul $M(a,b)$ aparține dreptei de ecuație $x + 2y - 5 = 0$.
- (4p) b) Să se calculeze lungimea razei cercului de ecuație $x^2 + y^2 - 2y = 0$.
- (4p) c) Să se calculeze distanța dintre punctele $A(2,3)$ și $B(5,7)$.
- (4p) d) Să se calculeze produsul $\cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{3}$.
- (2p) e) Să se calculeze suma $\cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{3}$.
- (2p) f) Să se calculeze partea reală a numărului $(\cos \pi + i \cdot \sin \pi)^3$.

SUBIECTUL II (30p)

- 1.
- (3p) a) Să se determine simetricul față de înmulțire al elementului $\hat{7} \in \mathbf{Z}_{12}$.
- (3p) b) Să se calculeze suma $\hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} + \hat{7}$ în grupul $(\mathbf{Z}_{10}, +)$.
- (3p) c) Să se determine $x \in \mathbf{Q}$ pentru care $32^x = 8$.
- (3p) d) Să se determine restul împărțirii polinomului $f = X^3 - 2X + 3$ la $g = X + 1$.
- (3p) e) Să se calculeze în câte moduri se poate alcătui o echipă de proiectare formată din 2 persoane, un inginer și un maistru, dacă avem la dispoziție 3 ingineri și 2 maistri.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x + 2 \cos x$.

- (3p) a) Să se determine $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se arate că $f(x) + f''(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2 \cos x}{7x}$.

SUBIECTUL III (20p)

Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție " \circ " definită prin
 $x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

- (4p) a) Să se verifice că $x \circ y = 2(x-1)(y-1)+1, \forall x, y \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se verifice că $x \circ 1 = 1 \circ x = 1, \forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se rezolve în intervalul $(0, \infty)$ ecuația $(2^x) \circ (\log_2 x) = 1$.
- (2p) e) Să se rezolve ecuația $x \circ x \circ x \circ x = 1, x \in \mathbf{R}$.
- (2p) f) Să se arate că mulțimea $\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$ nu este parte stabilă a lui \mathbf{R} în raport cu legea " \circ ".
- (2p) g) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că

$$x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = 2^{n-1}(x_1 - 1)(x_2 - 1)\dots(x_n - 1) + 1, \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}$$
.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x - e \cdot \ln x$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (4p) b) Să se calculeze $f(e)$ și $f'(e)$.
- (4p) c) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, e)$ și strict crescătoare pe intervalul (e, ∞) .
- (2p) d) Să se arate că $f(x) \geq 0, \forall x > 0$.
- (2p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.
- (2p) f) Să se deducă inegalitatea $e^x \geq x^e, \forall x > 0$.
- (2p) g) Să se demonstreze că $\int_1^e x^e dx \leq e^e - e$.

Varianta79

SUBIECTUL I

a) Coordonatele punctului M verifică ecuația dreptei, deci $a + 2b - 5 = 0 \Leftrightarrow a + 2b = 5$.

b) Ecuația se scrie $(x-0)^2 + (y-1)^2 = 1^2 \Rightarrow r = 1$. c) $AB = 5$. d) 0. e) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. f) -1.

SUBIECTUL II

1.

a) Avem $(\hat{\gamma})^{-1} = \hat{\gamma}$, deoarece $\hat{\gamma} \cdot \hat{\gamma} = \hat{1}$ în \mathbf{Z}_{12} . b) Suma cerută este $\hat{5}$. c) $\frac{3}{5}$. d) 4.

e) Numărul cerut este $3 \cdot 2 = 6$.

2.

a) $f'(x) = \cos x - 2 \sin x, x \in \mathbf{R}$.

b) $f''(x) = -\sin x - 2 \cos x, \forall x \in \mathbf{R}$. Deci, prin însumare se obține relația cerută.

c) $2 \sin 1 - \cos 1 + 1$.

d) Avem $\frac{f(x)}{x} = f(x) \cdot \frac{1}{x}$. Aceasta este produsul dintre funcția f mărginită și funcția $\frac{1}{x}$ pentru care $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. Deci limita este 0. e) $\frac{1}{7}$.

SUBIECTUL III

a) $x, y \in \mathbf{R} \Rightarrow 2(x-1)(y-1) + 1 = 2xy - 2x - 2y + 2 + 1 = x \circ y$.

b) $x, y, z \in \mathbf{R} \Rightarrow (x \circ y) \circ z = 2(x \circ y - 1)(z - 1) + 1 = 4(x-1)(y-1)(z-1) + 1$

și analog $x \circ (y \circ z) = 4(x-1)(y-1)(z-1)$, de unde rezultă că legea este asociativă.

c) Folosind a), avem că $x \circ 1 = 1 = 1 \circ x, \forall x \in \mathbf{R}$.

d) Folosind rezultatul de la a) obținem $x=2$.

e) Utilizând eventual a), ecuația devine $8(x-1)^4 + 1 = 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

f) Fie $P(n)$ egalitatea de demonstrat. $P(1)$ devine $x_1 = x_1 - 1 + 1$, adevărată. Presupunem că afirmația $P(k)$ este adevărată și demonstrăm că $P(k+1)$ este adevărată. Deoarece $x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_k \circ x_{k+1} = 2(A-1)(x_{k+1}-1) + 1 = 2 \cdot 2^{k-1} \cdot (x_1-1) \dots (x_k-1)(x_{k+1}-1)$, avem că și $P(k+1)$ este adevărată.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = 1 - \frac{e}{x} = \frac{x-e}{x}, \forall x > 0$. b) $f(e) = 0, f'(e) = 0$.

c) Din a) avem că $f' < 0$ pe $(0, e)$ și $f' > 0$ pe (e, ∞) .

d) $x = e$ este punct de minim global, deci $f(x) \geq f(e), \forall x \in (0, \infty)$.

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - e \cdot \frac{\ln x}{x} \right) = 1 - e \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 1$, utilizând eventual regula lui Hospital.

f) Utilizând d), pentru $\forall x > 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e \ln x \Leftrightarrow \ln(e^x) \geq \ln(x^e) \Leftrightarrow e^x \geq x^e$.

g) Integrând inegalitatea de la punctul anterior se obține cerința.