EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta** ….078*

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Ştiinţe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluţii complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul vectorului $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$.

(4p) **b)** Să se calculeze lungimea înălţimii corespunzătoare ipotenuzei triunghiului dreptunghic isoscel în care catetele au lungimea $2\sqrt{2}$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{6}$.

(4p) **d)** Să se determine partea reală a numărului complex $\left(\sqrt{3} - i\right)^2 + \left(\sqrt{3} + i\right)^2$.

(2p) **e)** Să se calculeze lungimea diagonalei unui paralelipiped dreptunghic de dimensiuni 4,5 şi 6.

(2p) **f)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât punctele $M(a,b)$ şi $N(b-1, 3a)$ să aparţină dreptei de ecuaţie $y - 2x = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se rezolve în $\mathbf{Z}_7$ ecuaţia $\hat{5} \cdot \hat{x} = \hat{4}$.

(3p) **b)** Să se calculeze restul împărţirii polinomului $f = X^3 - 2X + 4$ la polinomul $g = X + 1$.

(3p) **c)** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale strict pozitive ecuaţia $(\log_2 x)^2 = \log_2 x$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^x = 3^{x+1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relaţia $C_6^n < 10$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x - \operatorname{arctg} \cdot x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)dx$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

(3p) **d)** Să se arate că funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $C = A \cdot B - B \cdot A$.

(4p) **a)** Să se determine matricele A^2 şi B^2.

(4p) **b)** Să se verifice că $A \cdot B \neq B \cdot A$.

(4p) **c)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A .

(2p) **d)** Să se determine matricea C^2 .

(2p) **e)** Să se arate că matricea C este inversabilă şi să se calculeze inversa sa.

(2p) **f)** Să se determine suma elementelor matricei $C + C^2 + C^3 + ... + C^{2007}$.

(2p) **g)** Să se arate că există $X, Y \in M_2(\mathbf{R})$, $X \neq Y$, astfel încât $AX = BY$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

(4p) **b)** Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

(4p) **c)** Să se calculeze $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

(2p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x \to \infty} x f(x)$.

(2p) **e)** Să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.

(2p) **f)** Să se determine ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f .

(2p) **g)** Să se rezolve în intervalul $(0, \infty)$ ecuația $f(x) + f(x^2) + f(x^3) = 3\ln 2$.

Varianta 078

SUBIECTUL I

a) 5. b) 2. c) $\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. d) $\operatorname{Re}(z)=4$. e) $\sqrt{77}$. f) $a=2, b=4$.

SUBIECTUL II

1.

a) $x=\left(\hat{5}\right)^{-1}\cdot\hat{4}=\hat{3}\cdot\hat{4}=\hat{5}$. b) 5. c) Dacă $\log_2 x=y$, atunci: $y^2=y\Leftrightarrow y\in\{0,1\}$, deci $x\in\{1,2\}$. d) x=1. e) $p=\frac{2}{5}$.

2.

a) $f'(x)=1-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2}, x\in\mathbf{R}$. b) $1-\frac{\pi}{4}$. c) 0.

d) Din a) avem că $f'(x)>0, \forall x\in\mathbf{R}^*$ şi $f'(0)=0$, deci f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$. e) 0.

SUBIECTUL III

a) $A^2=B^2=O_2$. b) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, B\cdot A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot B\neq B\cdot A$. c) rang(A)=1.

d) Din b) se obține $C=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, C^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$. e) $C\cdot C=I_2\Rightarrow C^{-1}=C$.

f) Folosind d) rezultă că $C^{2n}=I_2, C^{2n+1}=C, \forall n\in\mathbf{N}^*$. Atunci

$$\sum_{k=1}^{2007}C^k=1003\cdot(C+I_2)+C=\begin{pmatrix}2007&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

g) Fie $X=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ şi $Y=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. Atunci $AX=BY=O_2$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{-1}{x(x+1)}, \forall x\in(0,\infty)$.

b) Din a) rezultă că $f'<0$, deci f este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$. c) 0.

d) 1. e) Integrând prin părți, obținem

$$\int_1^e f(x)\,dx=x\cdot f(x)\Big|_1^e-\int_1^e x\left(\frac{-1}{x(x+1)}\right)dx=e\left(\ln(e+1)-1\right)+\ln(x+1)\Big|_1^e$$

$$=e\ln(e+1)-e+\ln(e+1)-\ln 2.$$

f) $x=0$ este asimptotă verticală la dreapta.

g) Avem că $x=1$ este soluție, deoarece $f(1)=\ln 2$. Folosind b), pentru $x\in(0,1)\Rightarrow x^2,x^3\in(0,1)$, deci $f(x)+f(x^2)+f(x^3)>f(1)+f(1)+f(1)=3\ln 2$, deci nu avem soluție. Dacă $x>1\Rightarrow x,x^2\in(1,\infty)$ şi $f(x)+f(x^2)+f(x^3)<3\ln 2$, deci nu avem soluție. Deci unica soluție a ecuației este $x=1$.