

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta077

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze $\sin \frac{5\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3}$.
- (4p) b) Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a \cdot x + b \cdot y + 5 = 0$ să fie ecuația dreptei care conține punctele $A(2,1)$ și $B(-1,2)$.
- (4p) c) Să se calculeze aria triunghiului echilateral cu înălțimea egală cu $\sqrt{3}$.
- (4p) d) Să se calculeze modulul numărului complex $(1+3i)^2$.
- (2p) e) Să se determine ecuația tangentei la elipsa $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ în punctul $T(0,3)$.
- (2p) f) Să se rezolve în \mathbb{C} ecuația $|z| - z = 4 - 3i$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se rezolve ecuația $4^x + 2^{x+1} = 8$.
- (3p) b) Să se determine câte numere de patru cifre distințe se pot forma cu cifrele 1,2,3,4.

- (3p) c) Să se calculeze $C_7^0 + C_7^1 + \dots + C_7^7$.

- (3p) d) Să se rezolve în $(0, \infty)$ ecuația $\log_3(1+x) = 3$.

- (3p) e) Să se calculeze $\frac{3+3^2+3^3+\dots+3^{2007}}{3^{2007}-1}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2007}$

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

- (3p) c) Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției f .

- (3p) d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^{2007}}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbf{R}[X]$ $f = X^3 - 3X^2 - 2mX + 8$, $g = X^5, m \in \mathbf{R}$ și matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (4p) a) Să se calculeze A^2 .
- (4p) b) Să se calculeze $\det(I_2 + A)$.
- (4p) c) Să se determine $m \in \mathbf{Z}$ astfel încât rădăcinile polinomului f să fie în progresie aritmetică.
- (2p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$.
- (2p) e) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât $(I_2 + A)(I_2 + aA) = I_2$.
- (2p) f) Să se arate că $\det(I_2 + A^n) = 1, \forall n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$.
- (2p) g) Pentru $m = 3$, să se determine restul împărțirii polinomului g la polinomul f .

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (-\infty, 6] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{6-x}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (-\infty, 6)$.
- (4p) b) Să se determine punctele de intersecție ale graficului funcției f cu dreapta $y = x$.
- (4p) c) Să se arate că graficul funcției f nu are asymptote spre $-\infty$.
- (2p) d) Să se arate că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty, 6)$.
- (2p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - f(x-1)] \cdot \sqrt{-x}$.
- (2p) f) Să se calculeze $\int_2^5 f(x) dx$.
- (2p) g) Să se arate că $2 \leq (f \circ f)(x) \leq \sqrt{5}, \forall x \in [2, 5]$.

Varianta 077

SUBIECTUL I

a) 0. b) $\begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases}$. c) $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$. d) 10. e) $y = 3$. f) $z = -\frac{7}{8} + 3i$.

SUBIECTUL II

1.

a) $x = 3$. b) Există $4! = 24$ numere. c) $2^7 = 128$. d) $x = 26$. e) $\frac{3}{2}$.

2.

a) $f'(x) = 2007 \cdot x^{2006}$. b) 2007.

c) Cum $f'(0) = 0$ și $f'(x) > 0$ pentru $x \in \mathbf{R}^*$ avem că f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .

Numărul cerut este 0. d) $\frac{1}{2008}$. e) $+\infty$.

SUBIECTUL III

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$. b) 1. c) $x_2 = 1$. Din $f(1) = 0 \Rightarrow m = 3$.

d) Se observă că $x = 1$ este soluție. Cu schema lui Horner, ecuația devine $(x-1)(x^2 - 2x - 8) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 1, 4\}$. Se observă că numerele -2, 1, 4 sunt în progresie aritmetică, deci $m = 3$, găsit la c), convine.

e) Avem

$$(I_2 + A)(I_2 + a \cdot A) = I_2 \Leftrightarrow I_2 + a \cdot A + A + a \cdot A^2 = I_2 \Leftrightarrow (a+1)A = O_2 \Leftrightarrow a = -1.$$

f) Folosind a) avem $A^{2n} = O_2$, $A^{2n+1} = A$, $n \in \mathbf{N}^*$. Pentru n număr par,

$$\det(I_2 + A^n) = \det I_2 = 1, \text{ iar pentru } n \text{ număr impar, } \det(I_2 + A^n) = \det(I_2 + A) = 1.$$

g) Dacă $m = 3$ atunci efectuând împărțirea obținem restul $55X^2 - 66X - 120$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{6-x}}$, $x \in (-\infty, 6)$.

b) $y = x$, $f(x) = y \Rightarrow \sqrt{6-x} = x$. Dacă $x < 0$ atunci ecuația nu are soluție. Dacă $x \in [0, 6]$, atunci ecuația devine $6-x = x^2 \Leftrightarrow x \in \{2, -3\}$, deci $x = 2$ și $y = 2$.

Convine $A(2, 2)$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ nu există asimptotă orizontală la $-\infty$.

Cum $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{6-x}}{x} = 0$, nu avem nici asimptotă oblică spre $-\infty$.

d) Avem $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{6-x}}$, $f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{(6-x)^3}} < 0$, $x \in (-\infty, 6)$ și f continuă pe $(-\infty, 6]$. Atunci f este concavă pe $(-\infty, 6]$.

e) $-\frac{1}{2}$. f) $\int_2^5 f(x)dx = \frac{14}{3}$.

g) Din a) avem că f este descrescătoare, deci

$$2 \leq x \leq 5 \Rightarrow 1 = f(5) \leq f(x) \leq 2 = f(2) \Rightarrow f(1) \geq f(f(x)) \geq f(2), \text{ atunci } 2 \leq (f \circ f)(x) \leq \sqrt{5}.$$