

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D**
***Varianta ....076***

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările  
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

În sistemul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2;1)$  și  $B(3,4)$ .

- (4p) a) Să se verifice că  $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 3\vec{j}$ .
- (4p) b) Să se calculeze lungimea vectorului  $\overrightarrow{AB}$ .
- (4p) c) Să se scrie ecuația dreptei  $AB$ .
- (4p) d) Să se scrie ecuația mediatoarei segmentului  $[AB]$ .
- (2p) e) Să se scrie ecuația cercului de diametru  $[AB]$ .
- (2p) f) Să se scrie ecuația tangentei la cercul de diametru  $[AB]$  în punctul  $A$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1.

- (3p) a) Să se determine soluțiile ecuației  $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$ .
- (3p) b) Pe  $\mathbf{R}$  se definește legea de compozitie "◦" prin  $x ◦ y = 2xy + x + y + 1$ .  
 Să se arate că  $\exists x, y \in \mathbf{Q} - \mathbf{Z}$  astfel încât  $x ◦ y \in \mathbf{Z}$ .
- (3p) c) Să se rezolve ecuația  $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} - 6 = 0$ .
- (3p) d) Să se calculeze suma  $2 + 4 + 6 + \dots + 24 + 26$ .
- (3p) e) Să se determine soluțiile ecuației  $\hat{2} \cdot \hat{x} = \hat{4}$  în inelul  $(\mathbf{Z}_6, +, \cdot)$ .

2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 3x - 4$

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
- (3p) c) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2n)}{f(n)}$ .
- (3p) d) Să se determine punctele de extrem local ale funcției  $f$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .

Descarcat de pe site-ul [ebacalaureat.ro](http://ebacalaureat.ro)

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

**Varianta 076**

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră  $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{R} \right\}$  și  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

- (4p) a) Să se arate că  $I_3 \in G$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $\det A(0)$ .
- (4p) c) Să se arate că  $A(2)$  este inversabilă și să se calculeze inversa acesteia.
- (2p) d) Să se arate că  $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$ ,  $\forall A(x), A(y) \in G$ .
- (2p) e) Să se arate că  $\forall A(x) \in G$ ,  $\exists A(x') \in G$  astfel încât  $A(x) \cdot A(x') = I_3$ .
- (2p) f) Să se calculeze  $A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(2007)$ .
- (2p) g) Să se arate că  $A^n(x) = A(nx)$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 1$ ,  $\forall A(x) \in G$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x}$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}^*$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $\int_1^e f(x) dx$ .
- (4p) c) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $[2, +\infty)$ .
- (2p) d) Să se determine punctele de extrem local ale funcției  $f$ .
- (2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se demonstreze că  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 1$ .
- (2p) f) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul  $A(1,0)$ .
- (2p) g) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{1}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{n}\right)}{n^3}$ .

## Varianta 076

### SUBIECTUL I

a)  $\vec{AB} = (3-2)\vec{i} + (4-1)\vec{j} = \vec{i} + 3\vec{j}$ . b)  $\sqrt{10}$ . c)  $3x - y - 5 = 0$ .

d) Fie  $d$  dreapta căutată. Din

$$m_d \cdot m_{AB} = -1 \Rightarrow m_d = -\frac{1}{3} \Rightarrow (d) : y - \frac{5}{2} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow x + 3y - 10 = 0.$$

$$\text{e)} \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2.$$

f) Fie  $d_1$  dreapta căutată. Din

$$d_1 \perp AB \Rightarrow m_{d_1} \cdot m_{AB} = -1 \Rightarrow m_{d_1} = -\frac{1}{3} \Rightarrow d_1 : y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2) \Leftrightarrow x + 3y - 5 = 0.$$

### SUBIECTUL II

1.

a)  $2^x = y \Rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow y \in \{1, 2\} \Rightarrow x \in \{0, 1\}$ .

b)  $x \circ \frac{1}{2} = 2x + \frac{3}{2}$ , deci se pot considera numerele  $x = \frac{5}{4}$ ,  $y = \frac{1}{2}$ , pentru care  $\frac{5}{4} \circ \frac{1}{2} = 4$ .

c)  $(n+2)(n+3) - 6 = 0 \Leftrightarrow n \in \{0, -5\}$ . Soluția este  $n = 0$ .

d) 182. e)  $x \in \{\hat{2}, \hat{5}\}$ .

2.

a)  $f'(x) = 3x^2 - 3, \forall x \in \mathbf{R}$ . b) 0. c) 8. d)  $x_1 = 1, x_2 = -1$  sunt puncte de extrem local.

e)  $-\frac{21}{4}$ .

### SUBIECTUL III

a)  $I_3 = A(0) \in G$ . b)  $\det A(0) = 1$ . c)  $(A(2))^{-1} = A(-2)$ .

d)  $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{x+y} \end{pmatrix} = A(x+y)$ .

e) Folosind d) avem:  $A(x)A(x') = I_3 \Leftrightarrow A(x+x') = A(0) \Rightarrow x' = -x \in \mathbf{R}$  care există pt orice număr real  $x$ . Deci,  $\forall A(x) \in G, \exists A(-x) \in G$  astfel încât  $A(x)A(x') = I_3$ .

f) Folosind repetat d) avem

$$A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(2007) = A(1+2+3+\dots+2007) = A(2007 \cdot 1004).$$

g) Utilizăm inducția matematică. Pentru  $n = 1$  afirmația este adevărată. Presupunem că  $A^k(x) = A(kx)$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . Atunci  $A^{k+1}(x) = A^k(x) \cdot A(x) = A(kx) \cdot A(x) = A((k+1)x)$ , deci afirmația este adevărată și pentru  $n = k + 1$ .

#### SUBIECTUL IV

a)  $f'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$ . b)  $\frac{e^2}{2} - 5e + \frac{17}{2}$ .

c) Din a) avem că  $f'(0) = 0$ ,  $f'(x) > 0$ ,  $x \in (2, \infty)$ , deci funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $[2, \infty)$ .

d)  $x = 2$  este punct de minim local, iar  $x = -2$  este punct de maxim local.

e) Pentru  $n = 1$  afirmația este adevărată. Presupunem că

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$
 este adevărată,  $k \in \mathbb{N}^*$ . Atunci

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}, \text{ adică}$$

afirmația este adevărată și pentru  $n = k + 1$ .

f) (d):  $y - 0 = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow 3x + y - 3 = 0$ .

g)  $-\frac{4}{3}$ .