

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D**
***Varianta ....075***

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările  
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex  $\sqrt{2} + i\sqrt{3}$ .
- (4p) b) Să se determine  $a \in \mathbf{R}$  astfel încât partea reală a numărului complex  $z = 1 + (a-1)(3-i)$  să fie 4.
- (4p) c) Să se calculeze  $\sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$ .
- (4p) d) Să se determine  $a, b \in \mathbf{R}$ , astfel încât punctele  $A(3, 0)$  și  $C(0, -3)$  să aparțină dreptei de ecuație  $x + ay + b = 0$ .
- (2p) e) Să se scrie ecuația cercului cu centrul în punctul  $P(1, 1)$  și cu raza 2.
- (2p) f) Să se scrie ecuația unei drepte paralele cu dreapta  $d : 2x - 3y + 5 = 0$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**
**1.**

- (3p) a) Să se rezolve în  $\mathbf{Z}_8$  ecuația  $\hat{3} \cdot \hat{x} = \hat{7}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $4!-3!$ .
- (3p) c) Să se calculeze  $1+2+\dots+2^9$ .
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ .
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  să verifice relația  $n! < 30$ .

**2.** Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^3 + \sin x + x$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x)dx$ .
- (3p) c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .
- (3p) d) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

În mulțimea  $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$  se consideră matricea  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și submulțimea  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, c \in (0, \infty), b \in \mathbf{R} \right\}$ .

- (4p) a) Să se verifice că  $I_2 \in G$ .
- (4p) b) Să se calculeze determinantul matricei  $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in G$ .
- (4p) c) Să se arate că, dacă  $A, B \in G$ , atunci  $A \cdot B \in G$ .
- (2p) d) Să se verifice că, dacă  $C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in G$ , atunci matricea  $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{b}{ac} & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \in G$  și  $C \cdot D = D \cdot C = I_2$ .
- (2p) e) Să se găsească două matrice  $U, V \in G$  pentru care  $U \cdot V \neq V \cdot U$ .
- (2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $n \geq 2$ ,  $\forall a, c \in (0, \infty)$  și  $\forall b \in \mathbf{R}$  are loc  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + ac^{n-2} + c^{n-1}) & c^n \end{pmatrix}$ .
- (2p) g) Să se arate că  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\forall A \in G$ , există  $X \in G$  astfel încât  $X^n = A$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 3^x + 2^x$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- (4p) c) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- (2p) d) Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbf{R}$ .
- (2p) e) Să se arate că orice primitivă a funcției  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- (2p) f) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $f$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x = 0$  și  $x = 1$ .
- (2p) g) Să se rezolve ecuația  $f(x) + f(2x) + f(3x) = 6$ .

## Varianta 075

### SUBIECTUL I

a)  $|\sqrt{2} + i\sqrt{3}| = \sqrt{5}$ . b)  $a = 2$ . c)  $\sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ .

d)  $\begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases}$ . e)  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ . f) Dreapta  $2x - 3y + 1 = 0$  este paralelă cu dreapta dată  $2x - 3y + 5 = 0$ .

### SUBIECTUL II

1.

a)  $x = \hat{3} \cdot \hat{7} = \hat{5}$ .

b)  $E = 24 - 6 = 18$ .

c)  $1 + 2 + \dots + 2^9 = \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 2^{10} - 1$ .

d) Ecuația se rescrie sub forma echivalentă  $(x-1)(x^2 + 1) = 0$ . Se obține soluția reală  $x = 1$ .

e)  $\frac{4}{5}$ .

2.

a)  $f'(x) = 3x^2 + \cos x + 1$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

b)  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{7}{4} - \cos 1$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 2$ .

d) Cum  $\cos x \in [-1, 1]$  pentru orice  $x \in \mathbf{R}$ , rezultă că  $\cos x + 1 \geq 0$  oricare ar fi  $x \in \mathbf{R}$ .

Atunci  $f'(x) = 3x^2 + \cos x + 1 > 0$  pentru orice  $x \in \mathbf{R}$ , deci funcția  $f$  este crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$ .

### SUBIECTUL III

a) Pentru  $a = c = 1 \in (0, \infty)$  și  $b = 0 \in \mathbf{R}$ , rezultă  $I_2 \in G$ .

b)  $\det(M) = ac$ .

c) Fie  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in G$  și  $B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \in G$ . Atunci  $A \cdot B = \begin{pmatrix} ax & 0 \\ bx + cy & cz \end{pmatrix} \in G$ ,

deoarece  $ax, cz \in (0, \infty)$  și  $bx + cy \in \mathbf{R}$ .

d) Verificare prin calcul direct.

e) Fie  $U = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in G$  și  $V = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \in G$ . Pentru ca  $U \cdot V \neq V \cdot U$  este necesar ca

$bx + cy \neq ay + bz$ . Se pot alege matricele  $U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  și  $V = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , pentru care

$$U \cdot V = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = V \cdot U.$$

f) Pentru  $n = 2$ , egalitatea  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ b(a+c) & c^2 \end{pmatrix}$  este adevărată. Presupunem că

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ b(a^{k-1} + a^{k-2}c + \dots + ac^{k-2} + c^{k-1}) & c^k \end{pmatrix} \text{ și demonstrăm că}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & 0 \\ b(a^k + a^{k-1}c + \dots + ac^{k-1} + c^k) & c^{k+1} \end{pmatrix}.$$

Avem

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & 0 \\ ab(a^{k-1} + a^{k-2}c + \dots + ac^{k-2} + c^{k-1}) + bc^k & c^{k+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{k+1} & 0 \\ b(a^k + a^{k-1}c + \dots + ac^{k-1} + c^k) & c^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Deci } \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + ac^{n-2} + c^{n-1}) & c^n \end{pmatrix}, n \geq 2.$$

g) Fie  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in G$ . Căutăm o matrice  $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \in G$  astfel încât  $X^n = A$ .

Folosind f), rezultă  $x^n = a$ ,  $z^n = c$  și  $y(x^{n-1} + x^{n-2}z + \dots + yz^{n-2} + x^{n-1}) = b$ . Atunci,

pentru orice  $n \in \mathbf{N}^*$ , avem  $x = \sqrt[n]{a}$ ,  $y = \frac{b}{\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}c} + \dots + \sqrt[n]{ac^{n-2}} + \sqrt[n]{c^{n-1}}}$  și

$$z = \sqrt[n]{c}.$$

#### SUBIECTUL IV

a)  $f'(x) = 3^x \ln 3 + 2^x \ln 2$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .

c) Cum  $f'(x) > 0$  pentru orice  $x \in \mathbf{R}$ , rezultă că funcția  $f$  este crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .

d) Avem  $f''(x) = 3^x (\ln 3)^3 + 2^x (\ln 2)^2 > 0$  pentru orice  $x \in \mathbf{R}$ , rezultă că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbf{R}$ .

e) Fie  $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  o primitivă a funcției  $f$ . Atunci  $F'(x) = f(x) > 0$  pentru orice  $x \in \mathbf{R}$ , rezultă că funcția  $F$  este crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .

f) 
$$\int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 (2^x + 3^x) dx = \frac{1}{\ln 2} + \frac{2}{\ln 3}.$$

g) Deoarece funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ , ecuația  $f(x) + f(2x) + f(3x) = 6$  admite soluție unică. Avem ecuația  $3^x + 2^x + 3^{2x} + 2^{2x} + 3^{3x} + 2^{3x} = 6$  care admite unică soluție  $x = 0$ .