

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**

**Proba scrisă la MATEMATICĂ**

**PROBA D**

**Varianta ....074**

**Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările**

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze lungimea segmentului  $[AB]$ , unde  $A(3,5)$  și  $B(4,6)$ .
- (4p) b) Să se scrie conjugatul numărului complex  $12 - i$ .
- (4p) c) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu perimetrul 6.
- (4p) d) Să se calculeze  $\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3}$ .
- (2p) e) Să se determine coordonatele mijlocului segmentului  $[AB]$ , unde  $A(2,3)$  și  $B(4,5)$ .
- (2p) f) Să se scrie ecuația tangentei la cercul de ecuație  $x^2 + y^2 = 2$  în punctul  $T(1,1)$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

**1.**

- (3p) a) Să se determine inversa matricei  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .
- (3p) b) Să se arate că  $\log_2 2\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ .
- (3p) c) Să se rezolve ecuația  $\hat{3} \cdot \hat{x} = \hat{0}$  în  $\mathbf{Z}_6$ .
- (3p) d) Să se determine rădăcinile reale ale ecuației  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ .
- (3p) e) Să se determine numărul de submulțimi cu 3 elemente pe care le are o mulțime cu 5 elemente.

**2.** Se consideră funcția  $f : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^{2006}}$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}^*$ .
- (3p) c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
- (3p) d) Să se determine ecuațiile asymptotelor la graficul funcției  $f$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int f(x) dx$ ,  $x \in (0, \infty)$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră mulțimea  $G = (5, \infty)$ , iar pe  $\mathbf{R}$  se definește legea de compoziție  $x * y = xy - 5x - 5y + 30$ ,  $\forall x, y \in \mathbf{R}$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $x * y - (x - 5)(y - 5) - 5$ ,  $x, y \in \mathbf{R}$ .
- (4p) b) Să se arate că  $x * y \in G$ ,  $\forall x, y \in G$ .
- (4p) c) Să se arate că  $(x * y) * z = x * (y * z)$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$ .
- (2p) d) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție “\*”.
- (2p) e) Să se determine  $x \in G$  pentru care există  $x' \in G$  astfel încât  $x * x' = 6$ .
- (2p) f) Să se arate că  $(G, *)$  este un grup comutativ.
- (2p) g) Să se rezolve ecuația  $5^x * \sqrt{5^x} = 5$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 4x + 5}$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f(x) - 1 + \frac{4x + 8}{x^2 + 4x + 5}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) b) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) c) Să se determine punctele de extrem local ale funcției  $f$ .
- (2p) d) Să se determine ecuația asimptotei spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- (2p) e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} [f(n)]^n$ .
- (2p) f) Să se determine primitivele funcției  $f$ .
- (2p) g) Să se arate că  $\int_0^1 f(x) dx < 0$ .

## Varianta 074

### SUBIECTUL I

a)  $AB = \sqrt{(4-3)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{2}$ .

b)  $\bar{z} = 12 + i$ .

c) Dacă perimetrul este  $P = 6$ , atunci latura triunghiului este  $a = 2$ . Aria va fi

$$A = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}.$$

d)  $\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ .

e) Fie  $M$  mijlocul segmentului  $[AB] \Rightarrow M\left(\frac{2+4}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = M(3, 4)$ .

f) Punctul  $T(1, 1)$  este un punct care aparține cercului, deci ecuația tangentei se obține prin dedublarea ecuației cercului. Rezultă  $x_1x + y_1y = 2 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$ .

### SUBIECTUL II

1)

a) Fie  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Calculăm  $\det(A) = -2 \neq 0$ , deci matricea este inversabilă.

Transpusa matricei este  $'A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ , adjuncta este  $A^* = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ , iar inversa este

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b)  $\log_2 2\sqrt{2} = \log_2 2 + \log_2 \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \in \mathbf{Q}$ .

c) Prin verificare se găsesc soluțiile  $\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}$ .

d) Ecuația este bipătrată. Se notează  $x^2 = t$  și ecuația devine  $t^2 - 5t + 4 = 0$  cu soluțiile  $t_1 = 1$  și  $t_2 = 4$ . Revenind la notație se obțin pentru ecuația în  $x$  soluțiile  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 2$  și  $x_4 = -2$ .

e)  $C_5^3 = 10$

2)

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

b)  $f'(x) = -\frac{2006}{x^{2007}}$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = -2006.$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$  este asimptotă orizontală pentru graficul funcției către  $-\infty$ , respectiv  $+\infty$ .

Cum  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = +\infty$  și  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ , rezultă că dreapta  $x = 0$  este asimptotă verticală pentru graficul funcției  $f$ .

e)  $\int f(x) dx = \int x^{-2006} dx = -\frac{1}{2005x^{2005}} + C.$

### SUBIECTUL III

a)  $x * y - (x - 5)(y - 5) - 5 = xy - 5x - 5y + 30 - (xy - 5x - 5y + 25) - 5 = 0, \forall x, y \in \mathbf{R}$   
 $\Rightarrow x * y = (x - 5)(y - 5) + 5, \forall x, y \in \mathbf{R}.$

b)  $\forall x, y \in (5, \infty) \Rightarrow x > 5, y > 5 \Rightarrow (x - 5)(y - 5) > 0 \Rightarrow (x - 5)(y - 5) + 5 > 5 \Rightarrow x * y \in (5, \infty).$

c)  $(x * y) * z = [(x - 5)(y - 5) + 5] * z = (x - 5)(y - 5)(z - 5) + 5 \quad (1)$

$x * (y * z) = x * [(y - 5)(z - 5) + 5] = (x - 5)(y - 5)(z - 5) + 5 \quad (2)$

Din rezultatele (1) și (2) rezultă că  $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in \mathbf{R}$ .

d) Deoarece  $x * y = (x - 5)(y - 5) + 5 = (y - 5)(x - 5) + 5 = y * x, \forall x, y \in \mathbf{R}$ , rezultă că legea este comutativă.

Legea admite element neutru dacă  $\exists e \in (5, \infty)$  astfel încât  $x * e = e * x = x, \forall x \in \mathbf{R}$ .

Datorită comutativității este suficient să rezolvăm doar ecuația

$x * e = x \Leftrightarrow (x - 5)(e - 5) + 5 = x \Leftrightarrow (x - 5)(e - 6) = 0 \Rightarrow e = 6 \in (5, \infty).$

e) Rezolvăm ecuația  $x * x' = 6 \Leftrightarrow (x - 5)(x' - 5) + 5 = 6 \Rightarrow \exists x' = \frac{1}{x-5} + 5$  pentru orice

$x \in G$ . Mai trebuie să verificăm  $x' \in G \Leftrightarrow \frac{1}{x-5} + 5 > 5 \Leftrightarrow \frac{1}{x-5} > 0$  ceea ce este

adevărat pentru orice  $x \in G$ . Deci  $\forall x \in G, \exists x' \in G$  astfel încât  $x * x' = 6$ .

f) Din punctele anterioare rezultă că sunt verificate toate axiomele grupului comutativ.

g)  $5^x * \sqrt{5^x} = 5 \Leftrightarrow (5^x - 5)(\sqrt{5^x} - 5) = 0 \Rightarrow 5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1$  sau  $\sqrt{5^x} = 5 \Leftrightarrow x = 2$ .

### SUBIECTUL IV

a)

$$f(x) - 1 + \frac{4x+8}{x^2+4x+5} = \frac{x^2-3}{x^2+4x+5} - \frac{x^2+4x+5}{x^2+4x+5} + \frac{4x+8}{x^2+4x+5} = 0 \Rightarrow$$

$$f(x) = 1 - \frac{4x+8}{x^2+4x+5}, \forall x \in \mathbf{R}.$$

b)  $f'(x) = 0 - \frac{4(x^2 + 4x + 5) - (4x + 8)(2x + 4)}{(x^2 + 4x + 5)^2} = \frac{4x^2 + 16x + 12}{(x^2 + 4x + 5)^2}, \forall x \in \mathbf{R}.$

c) Rezolvând ecuația  $f'(x) = 0$  obținem soluțiile  $x_1 = -1$  și  $x_2 = -3$ .

$x$	$-\infty$	-3	-1	$\infty$
$f'(x)$	+++ + + + 0	-----	-0 + + + + + +	
$f(x)$		$f(-3)$	$f(-1)$	

Din tabel se observă că  $x_1 = -1$  și  $x_2 = -3$  sunt puncte de extrem local pentru funcția  $f$ .

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$  este asimptotă orizontală către  $+\infty$  la graficul funcției.

e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 3}{n^2 + 4n + 5} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-4n - 8}{n^2 + 4n + 5} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{-4n - 8}{n^2 + 4n + 5} \right)^{\frac{n^2 + 4n + 5}{-4n - 8}} \right]^{\frac{-4n - 8}{n^2 + 4n + 5} n} = e^{-4}.$$

f)  $\int f(x) dx = \int \left( 1 - \frac{4x + 8}{x^2 + 4x + 5} \right) dx = x - 2 \int \frac{(x^2 + 4x + 5)'}{x^2 + 4x + 5} dx = x - 2 \ln(x^2 + 4x + 5) + C.$

g)  $\int_0^1 f(x) dx = \left[ x - \ln(x^2 + 4x + 5) \right]_0^1 = 1 - 2 \ln 2 = \ln \frac{e}{4} < \ln 1 = 0.$