

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D**
***Varianta ....073***

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările  
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

În sistemul cartezian de coordonate  $xOy$ , se consideră punctele  $A(3,6)$ ,  $B(2,4)$ ,  $C(5,5)$ .

- (4p) a) Să se calculeze suma de numere complexe  $i^{1997} + i^{2002} + i^{2007} + i^{2012}$ .
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului  $[AC]$ .
- (4p) c) Să se calculeze aria triunghiului  $ABC$ .
- (4p) d) Să se calculeze  $\sin(\hat{CBA})$ .
- (2p) e) Să se determine  $m, n \in \mathbb{R}$  astfel încât  $x + my + n = 0$  să reprezinte ecuația dreptei  $BC$ .
- (2p) f) Să se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului  $ABC$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**
**1.**

- (3p) a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{3x} - 8^5 = 0$ .
- (3p) b) Se consideră progresia aritmetică  $2, 7, 12, 17, \dots$ . Să se determine termenul de rang 400 al progresiei.
- (3p) c) Să se determine câte numere naturale de 3 cifre distințe se pot forma cu elementele mulțimii  $\{0, 1, 2, 5\}$ .
- (3p) d) Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2007x - 2006$ . Să se calculeze  $(f \circ f)(1)$ .
- (3p) e) Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația  $n! = 24$ .

2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(x^2 + 2007)$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .
- (3p) c) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x)dx$ .
- (3p) d) Să se determine coordonatele punctului de extrem local al funcției  $f$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2007} f(0)}{2007 - n^{2007}}$ .

Descarcat de pe site-ul [ebacalaureat.ro](http://ebacalaureat.ro)

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

**Varianta 073**

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră matricele  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și mulțimile  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Z} \right\}$ ,

$$G_k = \left\{ A \in G \mid |\det(A)| = k, k \in \mathbf{N} \right\}.$$

- (4p) a) Să se arate că  $O_2 \in G$  și  $I_2 \in G$ .
- (4p) b) Să se arate că dacă  $A, B \in G$ , atunci  $AB \in G$ .
- (4p) c) Să se arate că  $\det(A) \cdot \det(B) = \det(A \cdot B)$  pentru orice  $A, B \in G$ .
- (2p) d) Să se arate că pentru orice  $x \in \mathbf{R}$  este adevărată egalitatea  $(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x$ .
- (2p) e) Să se arate că, dacă  $A \in G_1$ , atunci  $A$  este inversabilă.
- (2p) f) Să se arate că, dacă  $A \in G$  este inversabilă și  $A^{-1} \in G$ , atunci  $A \in G_1$ .
- (2p) g) Să se arate că pentru orice  $k \in \mathbf{N}$ ,  $G_{4k} \neq \emptyset$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcțiile  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$  și

$$g : A \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}, \text{ unde } A = \mathbf{R} \setminus \{1, 2, 3\}.$$

- (4p) a) Să se rezolve în  $\mathbf{R}$  ecuația  $f(x) = 0$ .
- (4p) b) Să se arate că  $g'(x) < 0$ ,  $\forall x \in A$ .
- (4p) c) Să se arate că  $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ ,  $\forall x \in A$ .
- (2p) d) Să se arate că  $(f'(x))^2 > f(x) \cdot f''(x)$ ,  $\forall x \in A$ .
- (2p) e) Să se determine numărul de asymptote verticale ale graficului funcției  $g$ .
- (2p) f) Să se calculeze  $\int_4^5 (g(x+1) - g(x)) dx$ .
- (2p) g) Utilizând eventual rezultatul de la punctul c) să se arate că ecuația  $f(x) - a \cdot f'(x) = 0$  are exact 3 soluții reale și distințe,  $\forall a \in \mathbf{R}$ .

## Varianta 073

### SUBIECTUL I

a) 0 . b)  $AC = \sqrt{5}$  . c)  $A = \frac{5}{2}$  . d)  $\sin(C\hat{B}A) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  . e)  $m = -3$  și  $n = 10$  . f)  $G\left(\frac{10}{3}, 5\right)$ .

### SUBIECTUL II

1.

a)  $x = 5$  . b)  $a_{400} = 2 + 399 \cdot 5 = 1997$  . c)  $3P_3 = 18$ . d)  $(f \circ f)(1) = 1$  . e)  $n = 4$ .

2.

a)  $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 2007}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \frac{1}{1004}$ .

c)  $\int_0^1 f(x) dx = \ln 2008 - 2 + 2\sqrt{2007} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2007}}$ .

d)  $x = 0$  este punct de extrem local (punct de minim).

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2007} f(0)}{2007 - n^{2007}} = -f(0) = -\ln 2007$ .

### SUBIECTUL III

a) Alegem  $a = b = 0 \in \mathbf{Z}$  și obținem  $O_2 \in G$ . Alegem  $a = 1 \in \mathbf{Z}$ ,  $b = 0 \in \mathbf{Z}$  și obținem  $I_2 \in G$ .

b) Fie  $A, B \in G$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$  cu  $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ . Atunci

$AB = \begin{pmatrix} ac + bd & ad + bc \\ ad + bc & ac + bd \end{pmatrix} \in G$  pentru că are forma matricelor din  $G$  și elementele sunt numere întregi.

c) calcul direct.

d)  $(x+1)^2 - (x-1)^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x + 1 = 4x$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .

e) Din  $A \in G_1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1 \neq 0$ , deci matricea este inversabilă.

f) Fie  $A \in G$  inversabilă și  $A^{-1} \in G$  inversa matricei  $A$ . Atunci  $\det(A) \in \mathbf{Z}$

și  $\det(A^{-1}) \in \mathbf{Z}$ . Din egalitatea  $A \cdot A^{-1} = I_2$  și ținând cont de rezultatul de la punctul

c), obținem  $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$ . Atunci  $\det(A) = \det(A^{-1}) = 1$  sau

$\det(A) = \det(A^{-1}) = -1$ . Deci  $|\det A| = 1 \Rightarrow A \in G_1$ .

g) Folosind rezultatul de la punctul d), putem scrie  $4k = (k+1)^2 - (k-1)^2$ , pentru orice număr natural  $k$ . Atunci  $\forall k \in \mathbf{N}$ , există numerele întregi  $a = k+1$ ,  $b = k-1$  și matricea  $A = \begin{pmatrix} k+1 & k-1 \\ k-1 & k+1 \end{pmatrix} \in G$  pentru care  $\det(A) = 4k$ . Rezultă că  $G_{4k} \neq \emptyset$  pentru  $\forall k \in \mathbf{N}$ .

#### SUBIECTUL IV

a) Soluțiile sunt 1,2,3.

b)  $g'(x) = -\left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-3)^2}\right) < 0, \forall x \in A$ .

c)  $f'(x) = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2)$ , pentru orice  $x \in \mathbf{R}$ .

Atunci  $g(x) = \frac{(x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{f'(x)}{f(x)}, \forall x \in A$ .

d) Din  $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \forall x \in A \Rightarrow g'(x) = \frac{f''(x)f(x) - f'(x)f'(x)}{f^2(x)}, \forall x \in A$ .

Dar  $g'(x) < 0, \forall x \in A$  (s-a demonstrat la punctul b)), deci  $f(x)f''(x) < (f'(x))^2, \forall x \in A$ .

e) Se determină că dreptele  $x=1$ ,  $x=2$  și  $x=3$  sunt asymptote verticale ale graficului funcției  $g$ , deci există 3 asymptote.

f)  $\int_4^5 (g(x+1) - g(x))dx = \int_4^5 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-3}\right)dx = (\ln|x| - \ln|x-3|)|_4^5 = \ln\frac{5}{8}$ .

g) Presupunem că  $a = 0$ , atunci ecuația devine  $f(x) = 0$  și are soluțiile distincte  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  și  $x_3 = 3$ . Presupunem că  $a \neq 0$ , atunci 1, 2, 3 nu sunt soluții, deci soluțiile se caută în  $A$ . Din punctul c) avem că  $f'(x) = f(x)g(x), \forall x \in A$ .

Înlocuind în ecuația inițială vom obține  $f(x)[1 - ag(x)] = 0$ . Dar  $f(x) \neq 0$  pentru  $\forall x \in A$ , deci  $1 - ag(x) = 0$ . Considerăm funcția  $h : A \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $h(x) = 1 - ag(x)$ . Trebuie să găsim rădăcinile acestei funcții. Avem  $h'(x) = -ag'(x), \forall x \in A$ .

Se disting două subcazuri:

1) Dacă  $a > 0$ , atunci  $h'(x) > 0, \forall x \in A$ .

$x$	$-\infty$	1	2	3	$\infty$
$h'(x)$	$++++++$	$++++++$	$++++++$	$++++++$	$++++++$
$h(x)$	1 ↗ $\infty$	$-\infty$ ↗ $\infty$	$-\infty$ ↗ $\infty$	$-\infty$ ↗ $\infty$	$-\infty$ ↗ 1

Se observă că graficul taie axa  $Ox$  în trei puncte distincte  $x_1 \in (1,2)$ ,  $x_2 \in (2,3)$  și  $x_3 \in (3, \infty)$ . Deci ecuația are trei soluții distincte.

2) Dacă  $a < 0$ , în mod analog se obțin tot trei soluții distințe  $x_1 \in (-\infty, 1)$ ,  $x_2 \in (1, 2)$  și  $x_3 \in (2, 3)$ .

