

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta072

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze produsul scalar al vectorilor $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.
- (4p) b) Să se calculeze $\sin^2 \frac{\pi}{2007} + \cos^2 \frac{\pi}{2007}$.
- (4p) c) Să se calculeze modulul numărului complex $z = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$.
- (4p) d) Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC dacă $AB = 6$, $AC = 8$ și $BC = 10$.
- (2p) e) Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(4, 5)$, $B(3, 3)$ și $C(5, \alpha)$ să fie egală cu 5.
- (2p) f) Să se determine partea reală a numărului complex $(2-i)(3+i)$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se calculeze $(\hat{3} + \hat{5}) \cdot \hat{3}$ în \mathbf{Z}_7 .
- (3p) b) Să se calculeze $3 + 6 + 9 + \dots + 99$.
- (3p) c) Să se determine $x \in (0, \infty)$ astfel încât $\log_2 x = 3$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $2^n + 3^n \geq 50$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + \cos x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- (3p) d) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + n})$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimile $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{Z} \right\}$, $U(G) = \{A \in G \mid \det(A) \neq 0, A^{-1} \in G\}$ și matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (4p) a) Să se verifice că $O_2 \in G$ și $I_2 \in U(G)$.
- (4p) b) Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $A + B \in G$.
- (4p) c) Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.
- (2p) d) Să se arate că dacă $A \in U(G)$, atunci $\det(A) = 1$.
- (2p) e) Să se arate că dacă $A \in U(G)$, atunci $A^4 = I_2$.
- (2p) f) Să se arate că dacă $A, B, C, D \in U(G)$ și $A \cdot B \cdot C \cdot D = I_2$, atunci printre matricele A, B, C și D există două care sunt egale.
- (2p) g) Să se arate că, dacă $A, B \in G$ și $A \cdot B = O_2$, atunci $A = O_2$ sau $B = O_2$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x + 2^{-x}$.

- (4p) a) Să se verifice că $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.
- (2p) d) Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbf{R} .
- (2p) e) Să se arate că graficul funcției f nu are asymptote.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{f(x)}$.
- (2p) g) Să se rezolve în multimea $(0, \infty)$ ecuația $f(x) + f(x^{21}) = f(x^2) + f(x^{2007})$.

Varianta 072

SUBIECTUL I

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 - 2 = 1$.

b) $\sin^2 \frac{\pi}{2007} + \cos^2 \frac{\pi}{2007} = 1$.

c) $\bar{z} = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = -i$.

d) Triunghiul este dreptunghic în A, deci raza cercului circumscris este $R = \frac{BC}{2} = 5$.

e) $A = \frac{1}{2} |\Delta| \Rightarrow \Delta = \pm 10$. Avem $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = 7 - \alpha$. Deci $7 - \alpha = \pm 10 \Rightarrow \alpha = -3$ sau

$\alpha = 17$.

f) $(2-i)(3+i) = 7 - i \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 7$.

SUBIECTUL II

1)

a) $(\hat{3} + \hat{5}) \cdot \hat{3} = \hat{1} \cdot \hat{3} = \hat{3}$.

b) $E = 3(1+2+3+\dots+33) = 3 \cdot \frac{33 \cdot 34}{2} = 1683$.

c) $\log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 8 \in (0, \infty)$.

d) Ecuația este echivalentă cu $(x+1)(x^2 + 1) = 0$, rezultă că singura soluție reală este $x = -1$.

e) Doar două elemente ale mulțimii verifică inegalitatea, deci probabilitatea este $\frac{2}{5}$.

2)

a) $f'(x) = 1 - \sin x$.

b) $\int_0^1 f(x) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \sin x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \sin 1$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 1$.

d) Deoarece $\sin x \leq 1, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$. În punctele de forma $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, în care se anulează derivata, funcția are valori diferite, deci f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sqrt{n^2 + n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{n + \sqrt{n^2 + n}} = -\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL III

a) Pentru $a = b = 0$ obținem $O_2 \in G$, iar pentru $a = 1$ și $b = 0$ obținem $I_2 \in G$. Dar I_2 este inversabilă, $\det I_2 = 1$, inversa fiind tot $I_2 \in G$. Deci $I_2 \in U(G)$.

b) Fie matricele $A, B \in G$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbf{Z}$ și $B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$ cu $c, d \in \mathbf{Z}$.

Atunci $A + B = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{pmatrix} \in G$, deoarece are forma matricelor din G , iar elementele sunt numere întregi.

c) Avem $AB = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix} \in G$ deoarece are forma matricelor din G , iar elementele sunt numere întregi.

d) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbf{Z}$ și $\det(A) = a^2 + b^2 \neq 0$. Dacă $A \in U(G)$ atunci există matricea $A^{-1} \in G$ astfel încât $A \cdot A^{-1} = I_2 \Rightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$. Dar $\det(A)$ și $\det(A^{-1})$ sunt numere întregi strict pozitive $\Rightarrow \det(A) = \det(A^{-1}) = 1$.

e) Dacă $A \in U(G)$ atunci, conform punctului anterior, $\det(A) = a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$ și $b = 0$ sau $a = 0$ și $b = \pm 1$. Obținem astfel patru matrice posibile și fiecare dintre ele verifică relația $A^4 = I_2$.

f) Dacă $A, B, C, D \in U(G)$ diferite două câte două, atunci ele sunt exact matricele obținute la punctul anterior, dar în acest caz $A \cdot B \cdot C \cdot D = -I_2$, contradicție. Deci există două care sunt egale.

g) Fie matricele $A, B \in G$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbf{Z}$ și $B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$ cu $c, d \in \mathbf{Z}$. Din $A \cdot B = O_2 \Rightarrow \begin{cases} ac - bd = 0 \\ ad + bc = 0 \end{cases}$. Prin rezolvarea sistemului în mulțimea numerelor întregi, obținem $a = b = 0$ sau $c = d = 0$, adică $A = O_2$ sau $B = O_2$.

SUBIECTUL IV

a) $f(-x) = 2^{-x} + 2^x = f(x), \forall x \in \mathbf{R}$.

b) $f'(x) = (2^x - 2^{-x}) \ln 2, x \in \mathbf{R}$.

c) Rezolvând ecuația $f'(x) = 0$ obținem soluția $x = 0$.

x	$-\infty$	0	∞
$f'(x)$	- - - - -	0 + + + + +	
$f(x)$		2	

Rezultă că $f'(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty, 0]$, deci funcția f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$, iar $f'(x) \geq 0, \forall x \in [0, \infty)$, deci funcția f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$.

d) Deoarece $f''(x) = (2^x + 2^{-x}) \ln^2 2 > 0$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$, funcția f este convexă pe \mathbf{R} .

e) Cum funcția f este continuă pe \mathbf{R} rezultă că nu există asymptote verticale. Căutăm asymptotele orizontale. Avem $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, deci nu există nici asymptotă orizontală spre ∞ la graficul funcției (la fel spre $-\infty$). Pentru asymptota oblică avem

$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, deci nu există nici asymptotă oblică spre ∞ la graficul funcției f (analog spre $-\infty$).

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2^{-x}}{\ln 2}}{2^x + 2^{-x}} = \frac{1}{\ln 2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} = \frac{1}{\ln 2}.$$

g) Se observă că $x=1$ este soluție. Dacă $x \in (0, 1)$, atunci $x > x^2$ și $f(x) > f(x^2)$ (funcția este strict crescătoare pe $[0, \infty)$). La fel $x^{21} > x^{2007}$ și $f(x^{21}) > f(x^{2007})$. Prin însumare avem $f(x) + f(x^{21}) > f(x^2) + f(x^{2007})$, deci pe intervalul $(0, 1)$ nu există soluții. Dacă $x \in (1, \infty)$, atunci $x < x^2$ și $f(x) < f(x^2)$. La fel $x^{21} < x^{2007}$ și $f(x^{21}) < f(x^{2007})$. Prin însumare avem $f(x) + f(x^{21}) < f(x^2) + f(x^{2007})$, deci nici pe intervalul $(1, \infty)$ nu există soluții. Rezultă că $x=1$ este soluție unică.