

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta071

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze volumul unei prisme patrulatere regulate cu latura bazei 3 și înălțimea 4.
- (4p) b) Să se afle aria triunghiului ABC cu $AB = 2, AC = 3$ și $m(\hat{A}) = \frac{\pi}{2}$.
- (4p) c) Să se stabilească semnul numărului $\operatorname{tg}1 \cdot \operatorname{ctg}1$.
- (4p) d) Să se afle coordonatele centrului de greutate al triunghiului cu vârfurile $A(2,3), B(-2,5), C(-3,-2)$.
- (2p) e) Să se calculeze $\sin \frac{7\pi}{3}$.
- (2p) f) Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1,1)$ și este paralelă cu dreapta de ecuație $y = 2x + 1$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 - X + 1 \in \mathbf{C}[X]$ care are rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{C}$.
- (3p) a) Să se afle probabilitatea ca un element al mulțimii $\{-1, 0, 1\}$ să fie rădăcină a polinomului f .
- (3p) b) Să se afle câtul și restul împărțirii polinomului f la binomul $X + 1$.
- (3p) c) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3$.
- (3p) d) Să se afle valoarea expresiei $\frac{1}{x_1 \cdot x_2} + \frac{1}{x_2 \cdot x_3} + \frac{1}{x_1 \cdot x_3}$.
- (3p) e) Să se rezolve în intervalul $(0, +\infty)$ ecuația $f(\log_3 x) = 0$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2006^x + x^2$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- (3p) c) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$.
- (3p) d) Să se demonstreze că funcția este convexă pe \mathbf{R} .
- (3p) e) Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0, x = 1$.

SUBIECTUL III (20p)

În $M_2(\mathbf{R})$ se consideră submulțimea $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1+2x & -2x \\ x & 1-x \end{pmatrix} \middle| x \in (-1, \infty) \right\}$.

- (4p) a) Să se arate că $I_2 \in M$.
- (4p) b) Să se calculeze determinantul matricei $A(2)$.
- (4p) c) Să se arate că $\det A(x) > 0$, $\forall A(x) \in M$.
- (2p) d) Să se arate că $xy + x + y \in (-1, \infty)$, $\forall x, y \in (-1, \infty)$.
- (2p) e) Să se arate că dacă $A(x), A(y) \in M$, atunci $A(x) \cdot A(y) = A(xy + x + y)$.
- (2p) f) Să se arate că pentru orice matrice $A(x) \in M$, există $A(x') \in M$ astfel încât $A(x) \cdot A(x') = A(x') \cdot A(x) = I_2$.
- (2p) g) Să se demonstreze că mulțimea M are o structură de grup comutativ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2(x-1)}{x+1}$ și $g(x) = f(x) - \ln x$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.
- (4p) b) Să se calculeze $g'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.
- (4p) c) Să se calculeze $f(1)$, $g(1)$, $g'(1)$.
- (2p) d) Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- (2p) e) Să se arate că funcția g este descrescătoare pe intervalul $[1, +\infty)$.
- (2p) f) Să se demonstreze că $\frac{2(x-1)}{x+1} \leq \ln x$, $(\forall)x \in [1, +\infty)$.
- (2p) g) Utilizând eventual rezultatul de la punctul anterior, să se arate că $\int_1^2 \left(\frac{2(x-1)}{x+1} - \ln x \right) dx \leq 0$.

Varianta 071

SUBIECTUL I

- a) Înlocuind în formula $V = A_b \cdot h = a^2 \cdot h$ obținem $V = 36$.
- b) Triunghiul este dreptunghic, deci aria este $A = \frac{AB \cdot AC}{2} = 3$.
- c) $\operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{ctg} 1 = 1 > 0$.
- d) Centrul de greutate este $G\left(\frac{2-2-3}{3}, \frac{3+5-2}{3}\right) = G(-1, 2)$.
- e) $\sin \frac{7\pi}{3} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- f) Din condiția de paralelism se obține panta $m = 2$. Ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1, 1)$ și are panta $m = 2$ este $y - 1 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 1$.

SUBIECTUL II

1)

- a) Numerele -1 și 1 sunt rădăcini, deci probabilitatea este $\frac{2}{3}$.
- b) Avem $f = (X - 1)^2(X + 1)$, deci polinomul este divizibil cu $X + 1$. Atunci câtul este $C(X) = (X - 1)^2$, iar restul este $r(X) = 0$.
- c) Aplicând relațiile lui Viète avem $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.
- d) Aplicând relațiile lui Viète avem $x_1 x_2 x_3 = -1$
- $$\Rightarrow \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_3} + \frac{1}{x_2 x_3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 x_2 x_3} = -1.$$
- e) Deoarece $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$, avem că $\log_3 x \in \{-1, 1\}$, deci $x \in \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}$.

2)

- a) $f'(x) = 2006^x \ln 2006 + 2x$, $x \in \mathbf{R}$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = \ln 2006$.
- c) Cum $f'(x) > 0$, $\forall x > 0 \Rightarrow$ funcția f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$.
- d) $f''(x) = 2006^x \ln^2 2006 + 2 > 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, deci funcția este convexă pe \mathbf{R} .
- e) Deoarece $f(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, atunci aria este

$$A = \int_0^1 f(x) dx = \left(\frac{2006^x}{\ln 2006} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2005}{\ln 2006} + \frac{1}{3}.$$

SUBIECTUL III

a) Alegem $x = 0 \in (-1, \infty)$ $\Rightarrow A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \in M$.

b) $A(2) = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A(2) = 3$.

c) $\det A(x) = \begin{vmatrix} 1+2x & -2x \\ x & 1-x \end{vmatrix} = (1+2x)(1-x) + 2x^2 = x+1 > 0$ pentru orice $x \in (-1, \infty)$.

d) Din $x > -1, y > -1 \Rightarrow (x+1)(y+1) > 0 \Leftrightarrow xy + x + y > -1$, deci $xy + x + y \in (-1, \infty)$.

e) Pentru $A(x) \cdot A(y) \in M$ avem

$$\begin{aligned} A(x)A(y) &= \begin{pmatrix} 1+2x & -2x \\ x & 1-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2y & -2y \\ y & 1-y \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (1+2x)(1+2y) - 2xy & -2y(1+2x) - 2x(1-y) \\ x(1+2y) + y(1-x) & -2xy + (1-x)(1-y) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1+2(xy+x+y) & -2(xy+x+y) \\ xy+x+y & 1-(xy+x+y) \end{pmatrix} = A(xy+x+y) \in M, \end{aligned}$$

pentru că $xy + x + y \in (-1, \infty)$ pentru orice $x, y \in (-1, \infty)$, folosind d).

f) Utilizând e), deducem că $A(x') \cdot A(x) = A(x) \cdot A(x') = A(xx' + x + x') \stackrel{a)}{=} A(0)$, dacă alegem $xx' + x + x' = 0$, adică $x' = \frac{-x}{x+1} \in (-1, \infty)$. Așadar $A\left(\frac{-x}{x+1}\right) \in M$ convine.

g) Din e) rezultă partea stabilă și comutativitatea. Asociativitatea rezultă din faptul că $M \subset M_2(\mathbf{R})$ și înmulțirea este asociativă pe $M_2(\mathbf{R})$. Elementul neutru este

$I_2 = A(0) \in M$ și din f) avem că toate elementele mulțimii M sunt inversabile.

Așadar (M, \cdot) este grup comutativ.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = \frac{2(x+1) - 2x + 2}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}, x > 0$.

b) $g'(x) = \frac{4}{(x+1)^2} - \frac{1}{x} = -\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}, x > 0$.

c) $f(1) = 0, g(1) = 0$ și $g'(1) = 0$.

d) Deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$, dreapta $y = 2$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

e) Conform punctului b) avem $g'(x) = -\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} \leq 0$ pentru orice $x \in [1, \infty)$, deci funcția g este strict descrescătoare pe $[1, \infty)$.

f) Deoarece funcția g este strict descrescătoare pe $[1, \infty) \Rightarrow g(x) \leq g(1)$ pentru orice $x \in [1, \infty)$, adică $g(x) \leq 0$ pentru orice $x \in [1, \infty) \Rightarrow \frac{2(x-1)}{x+1} \leq \ln x$ pentru orice $x \in [1, \infty)$.

g) Din punctul anterior avem că $g(x) \leq 0$ pentru orice $x \in [1, \infty) \Rightarrow \int_1^2 g(x)dx \leq 0$.