# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

**Proba scrisă la MATEMATICĂ**

**PROBA D**

***Varianta* ….070**

**Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările**

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

## SUBIECTUL I ( 20p )

În sistemul cartezian de coordonate $xOy$ se consideră punctele $A(9,7)$, $B(1,-8)$, $C(-6,-1)$, $D(-7,0)$.

(4p) **a)** Să se determine partea reală a numărului $z=(2+i)^2$.

(4p) **b)** Să se calculeze lungimea segmentului $[AB]$.

(4p) **c)** Să se arate că triunghiul $ABC$ este isoscel.

(4p) **d)** Să se determine $m,n\in \mathbf{R}$ astfel încât $x+my+n=0$ să reprezinte ecuația dreptei $BC$.

(2p) **e)** Să se determine coordonatele mijlocului segmentului $[BC]$.

(2p) **f)** Să se arate că punctele $B$, $C$, $D$ sunt coliniare.

## SUBIECTUL II ( 30p )

**1.**

(3p) **a)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $27^{x+1}=3$.

(3p) **b)** Să se calculeze $3+6+9+...+2007$.

(3p) **c)** Să se determine câte numere naturale divizibile cu 5, de două cifre distincte, se pot forma cu elementele mulțimii $\{0,2,5,7\}$.

(3p) **d)** Să se calculeze probabilitatea ca un element din $(\mathbf{Z_8},\cdot)$ să fie inversabil.

(3p) **e)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $C_3^1+xC_4^3+3=0$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^{2007}-e^{2007}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **d)** Să se demonstreze că funcția $f$ este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{2007}f(0)}{f(n)}$.

**SUBIECTUL III ( 20p )**

În $M_3(\mathbf{R})$ se consideră submulţimile $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 4^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbf{R} \right\}$ şi

$C(B) = \{X \in M_3(\mathbf{R}) | X \cdot B = B \cdot X\}$, unde $B = A(1) \in G$.

(4p) **a)** Să se arate că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, $\forall A(x), A(y) \in G$.

(4p) **b)** Să se arate că $\det(A(x)) \neq 0$, $\forall A(x) \in G$.

(4p) **c)** Să se arate că $\exists A(e) \in G$ astfel încât $A(x) \cdot A(e) = A(e) \cdot A(x) = A(x)$, $\forall A(x) \in G$.

(2p) **d)** Să se arate că $\forall A(x) \in G$, $\exists A(x') \in G$ astfel încât $A(x) \cdot A(x') = A(x') \cdot A(x) = A(0)$.

(2p) **e)** Să se determine inversa $B^{-1}$ a matricei $B$.

(2p) **f)** Să se determine $B^n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **g)** Să se arate că dacă $X \in C(B)$, atunci $\exists a,b,c \in \mathbf{R}$, cu $X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$.

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcţiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(x^2+1) - x^2$ şi $F : [0,\infty) \to \mathbf{R}$

$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $t \geq 0$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se arate că funcţia $f$ este strict descrescătoare pe $[0,\infty)$ şi strict crescătoare pe $(-\infty,0]$.

(4p) **c)** Să se arate că $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **d)** Să se calculeze $F(x), x \geq 0$.

(2p) **e)** Să se arate că $F(x) \leq 0, \forall x \geq 0$.

(2p) **f)** Să se arate că $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) **g)** Să se rezolve ecuaţia $f(x) = 2 - e$.

# Varianta 070

SUBIECTUL I

a) $z=(2+i)^2=4+4i-1=3+4i \Rightarrow \mathrm{Re}(z)=3$.

b) $|AB|=\sqrt{64+225}=17$.

c) Cum $|AC|=\sqrt{(-6-9)^2+(-1-7)^2}=\sqrt{225+64}=17=|AB|$ rezultă că triunghiul $ABC$ este isoscel.

d) *Soluția* 1. $BC:\begin{vmatrix} x & y & 1\\ 1 & -8 & 1\\ -6 & -1 & 1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x+y+7=0 \Rightarrow m=1$ şi $n=7$.

*Soluția* 2. Prin înlocuirea coordonatelor punctelor *B* şi *C* în ecuația dreptei obținem sistemul $\begin{cases}1-8m+n=0\\ -6-m+n=0\end{cases}$ care are soluția $m=1$ şi $n=7$.

e) Fie *M* mijlocul segmentului $[BC] \Rightarrow M\left(\frac{1-6}{2},\frac{-8-1}{2}\right)=M\left(-\frac{5}{2},-\frac{9}{2}\right)$.

f) *Soluția* 1. Punctele *B*, *C*, *D* sunt coliniare

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -8 & 1\\ -6 & -1 & 1\\ -7 & 0 & 1\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -1+56-7-48=0 \Leftrightarrow 0=0$. Deci punctele sunt coliniare.

*Soluția* 2. Punctele sunt coliniare dacă punctul *D* se găseşte pe dreapta *BC*. Înlocuind coordonatele lui *D* în ecuația dreptei *BC* avem : $-7+0+7=0$ ceea ce este adevărat, deci punctele $B,C,D$ sunt coliniare.

SUBIECTUL II

1)

a) $27^{x+1}=3 \Leftrightarrow 3^{3x+3}=3 \Leftrightarrow 3x+3=1 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}\in \mathbf{R}$.

b) $3+6+9+...+2007=3(1+2+3+...+669)=3\frac{669\cdot 670}{2}=672345$.

c) Numerele sunt de forma $\overline{ab}$ cu $a\neq b, a\neq 0$ şi $a,b\in\{0,2,5,7\}$. Din faptul că $\overline{ab}$ trebuie să fie divizibil cu 5 rezultă că $b=0$ sau $b=5$. În acest caz numerele care îndeplinesc aceste condiții sunt 20, 50, 70, 25, 75. Deci , în total sunt 5 numere.

d) Elementele inversabile în $\mathbf{Z}_8$ sunt $\hat{1},\hat{3},\hat{5},\hat{7}$. Probabilitatea este $\frac{4}{8}=0{,}5$.

e) Ecuația devine $3+4x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$.

2)

a) $f'(x)=2007x^{2006}$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2007$.

c) $\int_0^1 f(x)dx=\left(\dfrac{x^{2008}}{2008}-e^{2007}x\right)\Big|_0^1=\dfrac{1}{2008}-e^{2007}$.

d) Avem $f'(x)=2007x^{2006}\geq 0, \forall x\in \mathbf{R}$. Atunci funcția $f$ este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2007}f(0)}{f(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-e^{2007}n^{2007}}{n^{2007}-e^{2007}}=-e^{2007}$.

SUBIECTUL III

a) $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}4^x & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & x & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4^y & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & y & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4^{x+y} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & x+y & 1\end{pmatrix}=A(x+y)$,

$\forall\ A(x),A(y)\in G$.

b) $\det(A(x))=4^x>0$, $\forall x\in \mathbf{R}\Rightarrow \det(A(x))\neq 0$, $\forall\ A(x)\in G$.

c) Rezolvăm ecuația $A(x)A(e)=A(x)\Leftrightarrow A(x+e)=A(x)\Leftrightarrow x+e=x\Leftrightarrow e=0\in\mathbf{R}$.
Analog, din ecuația $A(e)A(x)=A(x)\Rightarrow e=0\in\mathbf{R}$. Deci, există $A(e)=A(0)\in G$ astfel încât $A(x)A(e)=A(e)A(x)=A(x)$, $\forall\ A(x)\in G$.

d) Din punctul a) avem $A(x)A(x')=A(x+x')=A(x'+x)=A(x')A(x)=A(0)$,
deci $x+x'=0\Rightarrow \exists x'=-x\in\mathbf{R}$, pentru orice $x$ real
$\Rightarrow\ \forall\ A(x)\in G, \exists\ A(x')=A(-x)\in G$ astfel încât $A(x)A(x')=A(x')A(x)=A(0)$.

e) $B=A(1)=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Avem $\det B=4\neq 0\Rightarrow$ matricea $B$ este inversabilă.

$A(0)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3\in G$. Din punctul anterior avem că $A(1)A(-1)=A(0)=I_3$. Deci

$B^{-1}=[A(1)]^{-1}=A(-1)=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\in G$.

f) Prin inducție matematică se demonstrează, că $B^n=A(n)=\begin{pmatrix}4^n & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & n & 1\end{pmatrix}$, $\forall\ n\in\mathbf{N}^*$.

g) Fie $X=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\in M_3(\mathbf{R})$. Faptul că $X\in C(B)$ implică egalitatea

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4a & b+c & c \\ 4d & e+f & f \\ 4g & h+i & i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4a & 4b & 4c \\ d & e & f \\ d+g & e+h & f+i \end{pmatrix}.$$

Din egalitățile obținute rezultă că $a,h\in\mathbf{R}$ , $e=i$ și $b=c=d=f=g=0$. Notând $e=b$ şi $h=c$ rezultă că există $a,b,c\in\mathbf{R}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}-2x=\dfrac{-2x^3}{x^2+1}$.

b) Rezolvând ecuația $f'(x)=0$ obținem singura soluție $x=0\in\mathbf{R}$.

| $x$ | $-\infty$ $\quad$ $0$ $\quad$ $\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | + + + + + + 0 - - - - - - - - |
| $f(x)$ | $\nearrow$ 0 $\searrow$ |

Se observă că funcția este strict descrescătoare pe $[0,\infty)$ și strict crescătoare pe $(-\infty,0]$.

c) Punctul $x=0$ este punct de maxim local. Valoarea maximă a funcției este $f(0)=0$. Atunci $f(x)\le f(0)=0,\ \forall x\in\mathbf{R}$.

d) $F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \ln(t^2+1)dt-\int_0^x t^2dt=\int_0^x t'\ln(t^2+1)dt-\left.\dfrac{t^3}{3}\right|_0^x=\left.t\ln(t^2+1)\right|_0^x-$

$-\int_0^x \dfrac{2t^2}{t^2+1}dt-\dfrac{x^3}{3}=x\ln(x^2+1)-2\left(\left.t\right|_0^x-\left.\operatorname{arctg}t\right|_0^x\right)-\dfrac{x^3}{3}=x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg}x-\dfrac{x^3}{3}$.

e) Din punctul c) rezultă că $f(x)\le 0,\ \forall x\in\mathbf{R}$, deci $f(x)\le 0,\ \forall x\ge 0$. Atunci $\int_0^x f(t)dt\le 0,\ \forall x\ge 0$, adică $F(x)\le 0,\ \forall x\ge 0$.

f) $f(-x)=\ln((-x)^2+1)-(-x)^2=\ln(x^2+1)-x^2=f(x),\ \forall x\in\mathbf{R}$.

g) Din punctul anterior rezultă că funcția $f$ este o funcție pară, deci graficul ei este simetric față de axa $Oy$. Pe intervalul $[0, \infty)$ funcția este strict descrescătoare, deci restricția ei pe acest interval este injectivă, adică pe acest interval ecuația are soluție unică. Se observă că $x = \sqrt{e-1} \in [0, \infty)$ este soluția. Din simetria graficului rezultă că ecuația mai are o soluție $x = -\sqrt{e-1} \in (-\infty, 0]$.