

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta069

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex $(3+i)^4$.
- (4p) b) Să se calculeze $\sin a$ dacă $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos a = \frac{3}{5}$.
- (4p) c) Să se determine partea reală a numărului complex $(\cos \pi + i \cdot \sin \pi)^{10}$.
- (4p) d) Să se determine măsura unghiului format de vectorii $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ și $\vec{v} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$.
- (2p) e) Să se calculeze $\cos B$ în triunghiul ABC dacă $AB = AC = 10$ și $BC = 12$.
- (2p) f) Să se determine numărul punctelor de intersecție dintre cercul de ecuație $x^2 + y^2 = 8$ și dreapta de ecuație $x + y = 0$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se determine $x, y \in \mathbf{R}$ astfel încât $(x-1)^2 + (x-y+3)^2 = 0$.
- (3p) b) Să se arate că ecuația $x^2 - (a+2)x + 2a = 0$ are rădăcini reale, $\forall a \in \mathbf{R}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\log_3 9^5$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale pozitive inecuația $\sqrt{x} \geq 4$.
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $2^n + n^2 > 10$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^x + \sin x + x$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- (3p) d) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(n)}{f(n)}$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbb{C})$ se consideră submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ și matricele

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (4p) a) Să se verifice că $O_2 \in G$ și $I_2 \in G$.
- (4p) b) Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.
- (4p) c) Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $A + B \in G$.
- (2p) d) Să se arate că dacă $X \in G$, atunci $\det(X) \neq 2$.
- (2p) e) Să se găsească două matrice $C, D \in G$, $C, D \neq I_2$, astfel încât $C \cdot D = I_2$.
- (2p) f) Să se găsească două matrice $P, Q \in G$, $P, Q \neq O_2$ astfel încât $PQ = O_2$.
- (2p) g) Să se găsească o matrice $M \in G$, cu proprietatea $\det(M) = 2007$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (4p) c) Să se arate că $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe \mathbf{R} .
- (2p) e) Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f .
- (2p) f) Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbf{R} .
- (2p) g) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

Varianta 069

SUBIECTUL I

a) $|z| = |3+i|^4 = (\sqrt{9+1})^4 = 100$.

b) Deoarece $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ avem că $\sin a > 0$. Din formula fundamentală a trigonometriei avem $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin a = \frac{4}{5}$.

c) $(\cos \pi + i \sin \pi)^{10} = (-1)^{10} = 1 \Rightarrow$ partea reală este 1.

d) $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{3 \cdot 4 - 2 \cdot 6}{\sqrt{3^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 6^2}} = 0 \Rightarrow m(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$.

e) Aplicăm teorema cosinusului în triunghiul ABC

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{100 + 144 - 100}{2 \cdot 10 \cdot 12} = \frac{3}{5}.$$

f) Rezolvăm sistemul $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$ și obținem soluțiile $(-2, 2)$ și $(2, -2)$, acestea reprezentând coordonatele punctelor de intersecție ale cercului cu dreapta. Deci dreapta și cercul se intersecțează în două puncte.

SUBIECTUL II

1) a) $(x-1)^2 + (x-y+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1=0$ și $x-y+3=0$ ceea ce implică $x=1$ și $y=4$.

b) Discriminantul ecuației este $\Delta = (a+2)^2 - 8a = a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2 \geq 0$ pentru orice număr real a . Deci ecuația are rădăcini reale pentru orice număr real a .

c) $\log_3 9^5 = \log_3 3^{10} = 10$.

d) $\sqrt{x} \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 16 \Leftrightarrow x \in [16, \infty)$.

e) Doar numerele 3, 4, 5 verifică inegalitatea, deci probabilitatea este $\frac{3}{5}$.

2)

a) $f'(x) = e^x + \cos x + 1$.

b) $\int_0^1 f(x) dx = \left(e^x - \cos x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = e - \cos 1 + \frac{1}{2}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 3$.

- d) $\cos x \geq -1, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow \cos x + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}, e^x > 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow$ funcția $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$, de unde deducem că funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(n)}{f(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n + \cos n + 1}{e^n + \sin n + n} = 1.$

SUBIECTUL III

a) Pentru $a = b = 0 \in \mathbf{Z}$ rezultă $O_2 \in G$. Pentru $a = 1 \in \mathbf{Z}$ și $b = 0 \in \mathbf{Z}$ rezultă $I_2 \in G$.

b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ cu a, b întregi și $B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$ cu c, d întregi. Atunci $AB = \begin{pmatrix} ac + bd & ad + bc \\ ad + bc & ac + bd \end{pmatrix}$. Această matrice are forma matricelor din G , iar elementele $ac + bd$ și $ad + bc$ sunt numere întregi. Deci $AB \in G$.

c) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ cu a, b întregi și $B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$ cu c, d întregi. Atunci $A + B = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+c \end{pmatrix}$. Această matrice are forma matricelor din G , iar elementele $a + c$ și $b + d$ sunt numere întregi. Deci $A + B \in G$.

d) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$, $a, b \in \mathbf{Z}$. Atunci $\det(X) = a^2 - b^2$. Presupunem că $\det(X) = 2$, atunci $(a-b)(a+b) = 2 \Rightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ a+b=1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=2 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a-b=-2 \\ a+b=-1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a-b=-1 \\ a+b=-2 \end{cases}$. Dar niciunul din aceste sisteme nu are soluții întregi, deci $\det X \neq 2$.

e) Fie $C, D \in G$ cu $C \neq I_2$ și $D \neq I_2$. Atunci $C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ și $D = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$. Din $CD = I_2 \Rightarrow \begin{cases} ac + bd = 1 \\ ad + bc = 0 \end{cases}$. O soluție a acestui sistem este $a = c = 0$ și $b = d = 1$, deci avem $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

f) Fie $P, Q \in G$ cu $P \neq O_2$ și $Q \neq I_2$. Atunci $P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ și $Q = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$. Din $PQ = O_2 \Rightarrow \begin{cases} ac + bd = 0 \\ ad + bc = 0 \end{cases}$. Prin adunarea celor două ecuații obținem $(a+b)(c+d) = 0$ ceea ce implică $a = -b$ sau $c = -d$. Așadar putem alege

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

g) Fie $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ cu a, b întregi $\Rightarrow \det(M) = a^2 - b^2 = 2007 \Rightarrow$ o variantă ar fi

$$\begin{cases} a-b=9 \\ a+b=223 \end{cases} \text{ care are soluția } a=116, b=107. \text{ Deci } M = \begin{pmatrix} 116 & 107 \\ 107 & 116 \end{pmatrix}.$$

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1, x \in \mathbf{R}.$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0.$

c) Vom demonstra că $\sqrt{x^2+1} > x, \forall x \in \mathbf{R}$. Pentru $x \leq 0$ este evidentă inegalitatea.

Pentru $x > 0$ avem $\sqrt{x^2+1} > x \Leftrightarrow 1 > 0$, ceea ce este adevărat. Deci $f(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

d) Cum $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} < 0, \forall x \in \mathbf{R}$, rezultă că funcția f

este strict descrescătoare pe \mathbf{R} .

e) Deoarece $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, rezultă că nu există asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f . Căutăm asimptota oblică. Aceasta are ecuația $y = mx + n$, unde

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)}{x} = -2, \text{ iar}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} = 0. \text{ Deci } y = -2x \text{ este}$$

ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f .

f) Avem $f''(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right)' = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0, \forall x \in \mathbf{R}$. De aici rezultă că funcția f este convexă pe \mathbf{R} .

g) $I = \int_0^1 (\sqrt{x^2+1} - x) dx = \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = I_1 - \frac{1}{2}.$

Aplicând metoda integrării prin părți pentru integrala I_1 obținem

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 x \left(\sqrt{x^2+1} \right)' dx - \ln \left(x + \sqrt{x^2+1} \right) \Big|_0^1 =$$

$$= x\sqrt{x^2 + 1} \Big|_0^1 - I_1 - \ln 2 = \sqrt{2} - I_1 - \ln 2 \Rightarrow I_1 = \frac{\sqrt{2} - \ln 2}{2}. \text{ Deci } I = \frac{\sqrt{2} - \ln 2 - 1}{2}.$$

