

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D**
***Varianta ....068***

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările  
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

În sistemul cartezian de coordonate  $Oxy$ , se consideră punctele  $A_n(n,0)$  și  $B_n(0,n)$ , unde

$n \in \{1,2,3,4\}$  și se notează cu  $M$  mulțimea formată din toate aceste 8 puncte.

- (4p) a) Să se calculeze distanța dintre punctele  $A_2$  și  $B_2$ .
- (4p) b) Să se determine ecuația dreptei  $A_1B_3$ .
- (4p) c) Să se determine ecuația paralelei prin  $B_1$  la dreapta  $A_1B_3$ .
- (4p) d) Să se calculeze aria triunghiului  $A_1A_4B_4$ .
- (2p) e) Să se calculeze  $\sin(A_1 \hat{A}_2 B_2)$ .
- (2p) f) Să se calculeze câte drepte determină toate punctele mulțimii  $M$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1.

- (3p) a) Să se calculeze  $a+b$  știind că numerele  $3, a, 4, b, 5$  sunt, în această ordine, în progresie aritmetică.
- (3p) b) Să se determine numărul natural  $c$  pentru care  $\frac{(c+4)!}{(c+3)!} = 5$  (se știe că pentru  $n \in \mathbb{N}^*$  se notează  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ).
- (3p) c) Să se determine câte soluții are în  $\mathbb{Z}_5$  ecuația  $\hat{3} \cdot x = \hat{4}$ .
- (3p) d) Să se calculeze numărul funcțiilor  $f : \{3,4,5\} \rightarrow \{3,4,5\}$  pentru care  $f(3)$  este număr impar.
- (3p) e) Să se calculeze în câte feluri se poate alcătui o echipă formată din 5 persoane, dacă avem la dispoziție 8 persoane.

2. Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ .
- (3p) b) Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul funcției  $f$ .
- (3p) c) Să se arate că funcția  $f$  este strict descrescătoare pe  $(0, \infty)$ .
- (3p) d) Să se determine cel mai mare dintre numerele  $a = f(\sqrt{3})$  și  $b = f(\sqrt{5})$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\int_1^2 f(x)dx$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră polinomul  $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ ,  $a, b, c \in \mathbf{R}$  și se notează cu  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{C}$  rădăcinile sale.

- (4p) a) Să se arate că dacă  $a + b + c = -1$ , atunci  $f(1) = 0$ .
  - (4p) b) Să se determine  $a, b, c \in \mathbf{R}$ , dacă polinomul  $f$  are rădăcinile egale cu 1, 2 și 3.
  - (4p) c) Să se arate că dacă  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = b$ , atunci  $a^2 = 3b$ .
  - (2p) d) Să se arate că dacă  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = b$ , atunci  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3c$ .
  - (2p) e) Să se determine rădăcinile polinomului  $f$  în cazul în care  $a = 1, b = -3, c = 1$ .
  - (2p) f) Să se arate că dacă  $a, b, c \in \mathbf{Z}$ , atunci  $A = f(-1) + f(1)$  este un număr par.
  - (2p) g) Să se arate că dacă  $a, b \in \mathbf{Z}$ , atunci nu există  $c \in \mathbf{Z}$  astfel încât
- $$f(-1) + f(1) + f(-i) + f(i) = 2007.$$

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcțiile  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  definite prin  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = 1 + \ln x - x$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ .
- (4p) b) Să se determine punctele de extrem local ale funcției  $f$ .
- (4p) c) Să se determine ecuația asymptotei spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- (2p) d) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f'(2) \cdot f'(3) \cdot \dots \cdot f'(n))$ .
- (2p) e) Să se calculeze  $g'(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ .
- (2p) f) Să se demonstreze că  $1 + \ln x \leq x$ ,  $\forall x \in (0, \infty)$ .
- (2p) g) Să se arate că  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \cos x) dx \leq 1$ .

## Varianta 068

### SUBIECTUL I

a)  $A_2(2, 0), B_2(0, 2) \Rightarrow A_2B_2 = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ .

b)  $A_1(1, 0), B_3(0, 3)$ . Ecuația dreptei  $A_1B_3 : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 3 = 0$ .

c) *Soluția* 1. Panta dreptei  $A_1B_3$  este  $m = -3$ , deci panta paralelei prin  $B_1(0, 1)$  la dreapta  $A_1B_3$  este tot  $m = -3$ . Ecuația dreptei determinată de punctul  $B_1(0, 1)$  și panta  $m = -3$  este  $y - 1 = -3(x - 0) \Leftrightarrow 3x + y - 1 = 0$ .

*Soluția* 2. O dreaptă paralelă cu dreapta  $A_1B_3$  are ecuația  $3x + y - a = 0$ . Condiția ca punctul  $B_1(0, 1)$  să aparțină acestei drepte implică  $a = 1$ . Deci ecuația dreptei este  $3x + y - 1 = 0$ .

d) Avem punctele  $A_1(1, 0), A_4(4, 0), B_4(0, 4)$ . Aria triunghiului este  $A = \frac{1}{2}|\Delta|$ , unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 12. \text{ Deci aria este } A = 6.$$

e) Triunghiul  $A_2OB_2$  este dreptunghic isoscel. Atunci  $\sin(A_1\hat{A}_2B_2) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

f) Sunt 16 drepte  $A_nB_k$ , unde  $n, k \in \{1, 2, 3, 4\}$ , iar împreună cu dreptele  $A_1A_2$  și  $B_1B_2$  sunt în total 18 drepte.

### SUBIECTUL II

1)

a) Avem  $4 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a+b=8$ .

b)  $\frac{(c+4)!}{(c+3)!} = 5 \Leftrightarrow c+4=5 \Leftrightarrow c=1$ .

c)  $\hat{3}$  este element inversabil în  $\mathbb{Z}_5$ , deci ecuația are soluție unică  $x = \hat{3}$ .

d)  $f(3)$  impar implică  $f(3) \in \{3, 5\}$  și  $f(4), f(5) \in \{3, 4, 5\}$ . Pentru cazul  $f(3)=3$  avem  $3 \cdot 3 = 9$  funcții, iar pentru cazul  $f(3)=5$  avem încă 9 funcții. În total sunt 18 funcții pentru care  $f(3)$  este impar.

e)  $C_8^5 = 56$  de moduri.

2) a)  $f'(x) = -\frac{3}{x^4} + \frac{4}{x^5} - \frac{5}{x^6}$ ,  $x > 0$ .

b) Cum  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , rezultă  $y = 0$  este asimptotă orizontală spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .

Cum  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2 - x + 1}{x^5} = +\infty$  și  $f$  este continuă pe  $(0, \infty)$ , rezultă că  $x = 0$  este unică asimptotă verticală la graficul funcției  $f$ .

c) Cum  $f'(x) = \frac{-3x^2 + 4x - 5}{x^6} < 0$ ,  $\forall x \in (0, \infty)$ , rezultă că funcția  $f$  este strict descrescătoare pe  $(0, \infty)$ .

d) Deoarece  $0 < \sqrt{3} < \sqrt{5}$  și funcția  $f$  este strict descrescătoare pe  $(0, \infty)$ , rezultă că  $f(\sqrt{3}) > f(\sqrt{5})$ . Deci  $a$  este numărul mai mare.

e)  $\int_1^2 \left( \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} \right) dx = \left[ -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} \right]_1^2 = \frac{61}{192}$ .

### SUBIECTUL III

a)  $f(1) = 1 + a + b + c = 1 - 1 = 0$ .

b) Soluția 1. Dacă  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$  sunt rădăcinile polinomului  $f$ , atunci

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 0 \\ f(3) = 0 \end{cases} \text{ Se obține sistemul } \begin{cases} a + b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = -8 \\ 9a + 3b + c = -27 \end{cases} \text{ care are soluția } \begin{cases} a = -6 \\ b = 11 \\ c = -6 \end{cases}.$$

Soluția 2. Dacă  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$  sunt rădăcinile polinomului  $f$ , folosind relațiile lui Viète avem  $a = -(x_1 + x_2 + x_3) = -6$ ,  $b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 11$  și  $c = -x_1x_2x_3 = -6$ .

c) Scriem primele două relații ale lui Viète pentru polinomul  $f$ , adică

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -a \text{ și } S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b. \text{ Atunci}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_1^2 - 2S_2 = a^2 - 2b \Rightarrow a^2 - 2b = b \Rightarrow a^2 = 3b.$$

d) Cum  $x_1, x_2, x_3$  sunt rădăcinile polinomului  $f$ , ele verifică ecuația atașată polinomului, deci

$$x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c = 0$$

$$x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c = 0$$

$$x_3^3 + ax_3^2 + bx_3 + c = 0$$

Adunând cele trei relații obținem  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + ab - ab + 3c = 0 \Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3c$ .

e) Polinomul este  $f = X^3 + X^2 - 3X + 1$ . Se observă că  $x_1 = 1$  este soluție pentru polinomul  $f$ . Utilizând schema lui Horner avem:

	$X^3$	$X^2$	$X$	$X^0$
	1	1	-3	1
1	1	2	-1	0

Celelalte două rădăcini le aflăm rezolvând ecuația  $x^2 + 2x - 1 = 0$  și obținem  $x_2 = -1 + \sqrt{2}$ , respectiv  $x_3 = -1 - \sqrt{2}$ .

f) Avem  $A = f(-1) + f(1) = (-1 + a - b + c) + (1 + a + b + c) = 2(a + c)$ , deci  $A$  este un număr par.

g)  $f(-1) + f(1) + f(-i) + f(i) = 2(a + c) + (i - a - bi + c) + (-i - a + bi + c) \Rightarrow$

$$4c = 2007 \Rightarrow c = \frac{2007}{4} \notin \mathbf{Z}. \text{ Deci nu există } c \in \mathbf{Z} \text{ care să îndeplinească cerința problemei.}$$

#### SUBIECTUL IV

a)  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}, x \in (0, \infty).$

b) Rezolvăm ecuația  $f'(x) = 0$  și obținem singura soluție  $x = 1 \in (0, \infty)$ .

$x$	0	1	$\infty$
$f'(x)$	- - - - 0	+	+++
$f(x)$	↘ 2 ↗		

Din tabel deducem că  $x = 1$  este punct de minim local pentru funcția  $f$ .

c) Deoarece  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , graficul funcției  $f$  nu are asimptotă orizontală spre  $+\infty$ .

Ecuția asymptotei oblice spre  $+\infty$  este  $y = mx + n$ , unde

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \leftarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = 1, \text{ iar } n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x + \frac{1}{x} - x \right) = 0. \text{ Deci dreapta } y = x \text{ este asymptota oblică spre } +\infty \text{ la graficul funcției } f.$$

d) Avem  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \left( 1 - \frac{1}{x} \right) \left( 1 + \frac{1}{x} \right), x > 0$ . Atunci

$$f'(2)f'(3)\dots f'(n) = \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \left( 1 + \frac{1}{3} \right) \dots \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \left( 1 + \frac{1}{n} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

e)  $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}, x \in (0, \infty).$

f) Rezolvăm ecuația  $g'(x) = 0$  și aflăm soluția  $x = 1 \in (0, \infty)$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+++ + 0	- - - - -	
$g(x)$		↗ 0 ↘	

Din tabel avem că  $g(1) = 0$  este valoarea maximă a funcției  $g$ , deci

$$g(x) \leq 0, \forall x \in (0, \infty) \Leftrightarrow 1 + \ln x - x \leq 0, \forall x \in (0, \infty) \Leftrightarrow 1 + \ln x \leq x, \forall x \in (0, \infty).$$

g) Cum  $\cos x \geq 0, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 1 + \cos x > 0, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Conform punctului

anterior, avem că  $\ln(1 + \cos x) \leq \cos x, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

$$\text{Atunci } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \cos x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1.$$