

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta067

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze partea reală a numărului complex $i^{16} + i^{18}$.
- (4p) b) Să se determine conjugatul numărului $z = i + 2$.
- (4p) c) Să se scrie ecuația unei drepte perpendiculare pe dreapta de ecuație $y = x + 2$.
- (4p) d) Să se dea un exemplu de două puncte A și B care aparțin cercului de ecuație $x^2 + y^2 = 4$.
- (2p) e) Să se găsească o pereche (a, b) de numere naturale pentru care $\frac{\pi}{12} = a \cdot \frac{\pi}{3} - b \cdot \frac{\pi}{4}$.
- (2p) f) Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{12}$, folosind eventual egalitatea
 $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x$, adevărată pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL II (30p)

1. În mulțimea $M_2(\mathbf{R})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$.

- (3p) a) Să se calculeze determinantul matricei A .
- (3p) b) Să se determine cel mai mare număr întreg a pentru care $\det(A) > 4$.
- (3p) c) Să se determine probabilitatea ca prin alegerea unui element a din mulțimea $\{0, 2, 4, 6\}$ matricea A să fie inversabilă.
- (3p) d) Să se determine numerele naturale a pentru care $\sqrt{6-a} = 4-a$.
- (3p) e) Să se determine numerele reale a pentru care $\det(A) = 2a$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 1 - x + \sin x$.

- (3p) a) Să se determine $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-f(x)}{x}$.
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^x$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

Varianța 067

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $\mathbb{Z}[X]$ a polinoamelor cu coeficienți întregi se consideră polinoamele

$$f = X - 3, \quad g = X^2 - 3X + 2, \quad h = X^3 - 6X^2 + 11X - 6 \text{ și}$$

$$P_n = X^n - a_n \cdot X - b_n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

- (4p) a) Să se arate că $h = f \cdot g$.
- (4p) b) Să se determine restul împărțirii lui g la f .
- (4p) c) Să se arate că polinoamele $h + g$ și $h - g$ au două rădăcini comune.
- (2p) d) Să se arate că dacă două polinoame q_1 și q_2 din $\mathbb{Z}[X]$ au o rădăcină întreagă comună, atunci polinomul $q_1 + q_2$ are cel puțin o rădăcină întreagă.
- (2p) e) Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{Z}$, $g(a)$ este un număr par.
- (2p) f) Să se determine a_3 și b_3 știind că polinomul P_3 se divide prin polinomul g .
- (2p) g) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ există o unică pereche (a_n, b_n) de numere întregi astfel încât polinomul P_n să se dividă prin g .

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = x^n \cdot \ln x$, $n \in \mathbb{N}^*$ și pentru

fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se notează cu x_n rădăcina strict pozitivă a ecuației $f'_n(x) = 0$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'_1(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (4p) b) Să se arate că $x_1 = \frac{1}{e}$ este punct de extrem local al funcției f_1 .
- (4p) c) Să se arate că funcția f_1 este convexă pe $(0, \infty)$.
- (2p) d) Să se calculeze $\int_1^e f_2(x) dx$.
- (2p) e) Să se arate că $\int_1^e f_2(x) dx \geq \int_1^e f_1(x) dx$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_n(x)$.

Varianta 067

SUBIECTUL I

- a) 0. b) $\bar{z} = -i + 2$. c) $y = -x + 2$. d) $A(0,2), B(-1,\sqrt{3})$. e) $a = b = 1$. f) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $\det A = 6 - a$. b) $a = 1$. c) $\frac{3}{4}$. d) $a = 2$. e) $2a = 6 - a \Leftrightarrow a = 2$.

2.

- a) $f'(x) = \cos x - 1$. b) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. c) 0. d) 1. e) $\frac{3}{2} - \cos 1$.

SUBIECTUL III

- a) Verificare directă. b) $r = 2$.

c) Ecuațiile $h + g = (x-1)(x-2)^2$ și $h - g = (x-1)(x-2)(x-4)$, admit rădăcinile comune $x_1 = 1, x_2 = 2$.

d) Dacă α este rădăcina comună, atunci $q_1(\alpha) = q_2(\alpha) = 0$ implică $(q_1 + q_2)(\alpha) = 0$, adică $q_1 + q_2$ are cel puțin rădăcina $\alpha, \alpha \in \mathbf{Z}$.

e) $g(a) = (a-1)(a-2), a \in \mathbf{Z}$. Cum $a-1, a-2$ sunt numere întregi consecutive, atunci unul dintre ele este număr întreg par, ceea ce implică $g(a)$ este număr par, $\forall a \in \mathbf{Z}$.

f) $P_3 = g \cdot (x - \alpha)$, adică $X^3 - a_3 \cdot X - b_3 = (X-1)(X-2)(X-\alpha)$. Punem valorile 1 și 2 și obținem $a_3 = 7$ și $b_3 = -6$.

g) Dacă P_n divizibil cu g , există $\beta \in \mathbf{Z}[X]$ astfel încât

$X^n - a_n X - b_n = (X-1)(X-2) \cdot \beta$. Pentru valorile 1, respectiv 2 obținem sistemul

de ecuații: $\begin{cases} 1 - a_n - b_n = 0 \\ 2^n - 2a_n - b_n = 0 \end{cases}$, care are soluție unică pentru orice $n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$ și

anume $a_n = 2^n - 1, b_n = 2 - 2^n, \forall n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$.

SUBIECTUL IV

- a) $f'_1(x) = 1 + \ln x$.

- b) $x = \frac{1}{e}$ este punct de extrem local.

c) $f_1''(x) = \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in (0, \infty)$, adică f_1 este convexă pe $(0, \infty)$. d) $\frac{2e^3 + 1}{9}$.

e) Deoarece $x^2 \cdot \ln x \geq x \cdot \ln x, \forall x \in [1, e]$ avem $\int_1^e x^2 \cdot \ln x dx \geq \int_1^e x \cdot \ln x dx$.

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{n}} = 1$, unde x_n este rădăcina strict pozitivă a ecuației

$$x^{n-1} \cdot (n \ln x + 1) = 0 \text{ și anume } x_n = e^{-\frac{1}{n}}$$

g) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^{n-1} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$.