

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta066

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine coordonatele simetricului punctului $A(2,0)$ față de originea axelor de coordinate.
- (4p) b) Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{2+3i}{3+2i}$.
- (4p) c) Să se determine cel mai mic dintre numerele $a = \cos \frac{\pi}{6}$ și $b = \cos \frac{\pi}{8}$.
- (4p) d) Să se arate că punctul $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ aparține cercului de ecuație $x^2 + y^2 = 4$.
- (2p) e) Să se calculeze lungimea segmentului determinat de punctele $A(1, 2, 3)$ și $B(3, 2, 1)$.
- (2p) f) Să se determine $a \in \mathbf{R}$, astfel încât vectorii $\vec{v} = a\vec{i} + \vec{j}$ și $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j}$ să fie perpendiculari.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1}$.
- (3p) b) Să se arate că numărul $\log_2 8 - \log_3 9$ este întreg.
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2 + x - 2 = 0$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x + 16^x = 20$.
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $3n < 2^n$.

 2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 3x - \sin x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

- (3p) d) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .

- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n})$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinomul $f = (X + i)^{10} + (X - i)^{10}$ cu forma algebrică

$$f = a_{10}X^{10} + a_9X^9 + \dots + a_1X + a_0, \quad a_k \in \mathbf{C}, \quad k \in \{0,1,2,\dots,10\}.$$

- (4p) a) Să se calculeze $f(0)$.
- (4p) b) Să se determine a_{10} și a_0 .
- (4p) c) Să se calculeze suma coeficienților polinomului f .
- (2p) d) Să se calculeze $f(i)$.
- (2p) e) Să se arate că polinomul f are toți coeficienții numere reale.
- (2p) f) Să se arate că, dacă $z \in \mathbf{C}$ este o rădăcină a lui f , atunci $|z + i| = |z - i|$.
- (2p) g) Să se arate că toate rădăcinile polinomului f sunt reale.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (x + 1)^{2006} - 2006x - 1$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se calculeze $f(0)$ și $f'(0)$.
- (4p) c) Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbf{R} .
- (2p) d) Să se arate că $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$.
- (2p) f) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.
- (2p) g) Să se arate că $(x + 1)^{2007} \geq 2007 \cdot 1003x^2 + 2007x + 1$, $\forall x \geq 0$.

Varianta 066

SUBIECTUL I

- a) Punctul $M(-2,0)$ este simetricul lui A față de O . b) 1.
 c) Numărul a este mai mic. d) Pentru că $(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4$ rezultă că punctul A este pe cercul dat. e) $AB = 2\sqrt{2}$. f) $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow a \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$.

SUBIECTUL II

1.

a) $x = 1$. b) $\log_2 8 - \log_3 9 = 3 - 2 = 1 \in \mathbf{Z}$. c) $x_1 = 1, x_2 = -2$. d) 1. e) $\frac{2}{5}$.

2.

a) $f'(x) = 3 - \cos x$. b) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2} + \cos 1 - 1$. c) 2.

d) $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, deci f este strict crescătoare. e) 1.

SUBIECTUL III

- a) $f(0) = i^{10} + i^{10} = -2$. b) $\Rightarrow a_{10} = 2, a_0 = -2$.
 c) Suma coeficienților este $f(1) = 2 - 90 + 410 - 410 + 90 - 2 = 0$, din relația de la punctul b), sau $f(1) = (1+i)^{10} + (1-i)^{10} = (2i)^5 + (-2i)^5 = 0$. d) $f(-1) = f(1) = 0$.
 e) $a_{10} = 2, a_8 = -90, a_6 = 410, a_4 = -410, a_2 = 90, a_0 = -2$ și
 $a_9 = a_7 = a_5 = a_1 = 0$ numere reale.
 f) Dacă $z \in \mathbf{C}$ este rădăcină pentru f atunci
 $(z+i)^{10} + (z-i)^{10} = 0 \Leftrightarrow (z+i)^{10} = -(z-i)^{10}$ și trecând la module se obține
 $|z+i|^{10} = |-(z-i)|^{10} \Leftrightarrow |z+i|^{10} = |-1| \cdot |z-i|^{10} \Leftrightarrow |z+i| = |z-i|$.
 g) Fie $z \in \mathbf{C}$ o rădăcină complexă a polinomului f . Atunci $|z+i| = |z-i|$ și
 $z = a+ib \Rightarrow \sqrt{a^2 + (b+1)^2} = \sqrt{a^2 + (b-1)^2}$, de unde $b = 0$ și $z = a \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL IV

- a) $f'(x) = 2006(x+1)^{2005} - 2006$. b) $f(0) = 1 - 0 - 1 = 0, f'(0) = 0$.
 c) Deoarece $f''(x) = 2006 \cdot 2005(x+1)^{2004} \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, rezultă f este convexă pe \mathbf{R} .

d) În punctul de abscisă $x = 0$ se atinge minimul funcției f . Rezultă
 $f(x) \geq f(0) = 0, \forall x \in \mathbf{R}$.

e) Se aplică regula lui l'Hospital și se obține $1003 \cdot 2005$. f)

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{2^{2007} - 1}{2007} - 1004.$$

g)

$$(x+1)^{2007} = x^{2007} + C_{2007}^1 x^{2006} + \dots + C_{2007}^2 x^2 + C_{2007}^1 x + 1 \geq C_{2007}^2 x^2 + C_{2007}^1 x + 1 = 2007 \cdot 1003 \cdot x^2 + 2007 \cdot x + 1, \forall x \geq 0.$$