

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta065

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine distanța dintre punctele $A(-2,5)$ și $B(1,1)$.
- (4p) b) Să se arate că punctele $M(1,1), N(2,3), P(4,7)$ sunt coliniare.
- (4p) c) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ dacă $1 + (a+b) \cdot i = a + 3 \cdot i$, unde $i^2 = -1$.
- (4p) d) Să se determine $\sin(\hat{A})$ dacă în triunghiul ABC avem $5 \cdot m(\hat{A}) = m(\hat{B}) + m(\hat{C})$.
- (2p) e) Să se dea un exemplu de numere $x, y \in \mathbf{R}, x \neq y$ pentru care $\sin x = \sin y$.
- (2p) f) Să se demonstreze că vectorii $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ sunt perpendiculari.

SUBIECTUL II (30p)

1. Pe \mathbf{R} se definește legea de compozitie "*" prin $x * y = \frac{2x+3y}{2}, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

- (3p) a) Să se calculeze $\frac{3}{2} * \frac{2}{3}$.
- (3p) b) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ pentru care $x * a = x, \forall x \in \mathbf{R}$.
- (3p) c) Să se determine $c \in \mathbf{R}$ pentru care $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b \in \mathbf{R}$.
- (3p) d) Să se determine $x \in \mathbf{R}$ pentru care $(2^x) * (2^x) = 10$.
- (3p) e) Să se determine $y \in (0, \infty)$ pentru care $(\log_2 y) * (\log_2 y) = 10$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = |2x - 2|$.

- (3p) a) Să se calculeze $f(-4) \cdot f(-3) \cdot f(-2) \cdots f(2) \cdot f(3) \cdot f(4)$.
- (3p) b) Să se calculeze $f'(-2) + f'(2)$.
- (3p) c) Să se rezolve ecuația $f(x) = 4$.
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(n)}{2n} \right)^{\frac{2}{n}}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea G formată din toate matricele cu 3 linii și 3 coloane și care au toate elementele din mulțimea $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, precum și mulțimea

$$H = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \mid x \in M \right\}.$$

- (4p) a) Să se calculeze determinantul matricei $A(2) \in H$ și să se determine rangul acesteia.
- (4p) b) Să se determine $(A(1))^n$, $n \in \mathbf{N}^*$.
- (4p) c) Să se determine numărul elementelor mulțimii H .
- (2p) d) Să se arate că există $A(x), A(y) \in H$, $x \neq y$ astfel încât $A(x) \cdot A(y) \in H$.
- (2p) e) Să se arate că pentru orice $A(x) \in H$ numărul $\det A(x)$ este par.
- (2p) f) Să se arate că dacă $A \in G$ și $\det(A)$ este un număr întreg impar, atunci cel puțin trei dintre elementele matricei A sunt egale cu 1 sau -1.
- (2p) g) Să se arate că dacă $A \in G$ și $\det(A)$ este un număr întreg impar, atunci cel puțin unul dintre elementele matricei A este număr par.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ și se definește sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ prin $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

- (4p) a) Să se determine ecuațiile asymptotelor la graficul funcției f .
- (4p) b) Să se calculeze $f'(x)$ și să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.
- (4p) c) Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 2$.
- (2p) d) Să se arate că $\frac{25}{144} < \frac{1}{e^2} + \frac{1}{\pi^2} < \frac{52}{144}$.
- (2p) e) Să se arate că $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, $\forall k \geq 2$.
- (2p) f) Folosind eventual punctul e), să se arate că sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este mărginit.
- (2p) g) Știind că sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ are limita $\frac{\pi^2}{6}$, să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} \right).$$

Varianta 065

SUBIECTUL I

a) 5. b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow A, B, C \text{ coliniare.}$ c) $a = 1, b = 2.$ d) $\sin A = \frac{1}{2}.$

e) $\sin \frac{\pi}{4} = \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$ f) Din $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$

SUBIECTUL II

1.

a) $\frac{5}{2}.$ b) $a = 0.$

c) $(a * b) * c = \frac{2a + 3b}{2} * c = \frac{2a + 3b + 3c}{4} \text{ și } a * (b * c) = \frac{4a + 6b + 9c}{4}.$ Egalând

cele două relații obținem: $4a + 6b + 6c = 4a + 6b + 9c \Leftrightarrow c = 0.$

d) $2^x * 2^x = 10 \Leftrightarrow 5 \cdot 2^x = 20 \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2.$ e) Ecuația devine $\log_2 y = 4 \Leftrightarrow y = 16.$

2.

a) Rezultatul este 0 pentru că $f(1) = 0.$ b) $f'(-2) + f'(2) = -2 + 2 = 0.$

c) $x \in \{-1, 3\}.$ d) 1. e) 1.

SUBIECTUL III

a) $A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \det A(2) = 4 \Rightarrow \text{rang } A(2) = 3.$

b) $B = A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot A(1).$ Presupunem $B^k = 3^{k-1} \cdot B$ și

arătăm că $B^{k+1} = 3^k \cdot B,$ folosind inducția matematică.

c) Avem $A(-2), A(-1), A(0), A(1), A(2),$ deci sunt 5 elemente.

d) Fie $A(x), A(y) \in H.$ Atunci

$$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy + 2 & x + y + 1 & x + y + 1 \\ x + y + 1 & xy + 2 & x + y + 1 \\ x + y + 1 & x + y + 1 & xy + 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A(-2) \cdot A(-2) = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -5 \\ -5 & 6 & -5 \\ -5 & -5 & 6 \end{pmatrix} \notin H ; A(1) \cdot A(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A(1) \in H .$$

e) $\det A(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2 \cdot (x+2) \in \{0, 2, 4\}.$

f) Avem

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11},$$

sunt 6 termeni. Din $\det(A)$ impar obținem că cel puțin un termen din sumă este impar și deci cel puțin 3 elemente din matrice impare \Rightarrow cel puțin 3 elemente egale cu 1 sau -1.

g) Din $\det(A)$ impar obținem cel puțin un termen din sumă este par și cel puțin un element din matrice este par.

SUBIECTUL IV

a) $x = 0$ este asimptotă verticală, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ este asimptotă orizontală.

b) Cum $f'(x) = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3} < 0$ pentru $\forall x \in (0, \infty)$, rezultă că f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$. c) $\frac{1}{2}$.

d) Deoarece f este descrescătoare și $2 < e < 3$, rezultă $\frac{1}{9} < \frac{1}{e^2} < \frac{1}{4}$. Deoarece f este descrescătoare și $3 < \pi < 4$, rezultă $\frac{1}{16} < \frac{1}{\pi^2} < \frac{1}{9}$. Prin adunarea celor două inegalități se obține $\frac{25}{144} = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} < \frac{1}{e^2} + \frac{1}{\pi^2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36} = \frac{52}{144}$.

e) $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \Leftrightarrow (k-1) < k^2 - k(k-1) \Leftrightarrow k-1 < k \Leftrightarrow -1 < 0$ adevărată pentru orice $k \geq 2$.

f) Folosind f) avem $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2$

pentru orice $n \geq 1$. Atunci $a_1 = 1$ și $a_n < 2$, $\forall n \geq 2$, deci sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este mărginit.

g)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} \right) =$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2} \right] - \left[\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right] \right\} =$$
$$\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{3\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}.$$

SNEE