

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta064

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine partea reală a numărului complex $z = i^{2006} + i^{2007}$.
- (4p) b) Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului cu vârfurile în punctele $A(-2,-2), B(2,0), C(0,4)$.
- (4p) c) Să se calculeze $\cos^2(75^\circ) + \cos^2(15^\circ)$.
- (4p) d) Să se determine în câte puncte intersectează dreapta de ecuație $y = 1$ cercul cu centru în $O(0,0)$ și de rază 1.
- (2p) e) Să se determine câte puncte cu ambele coordonate întregi aparțin cercului cu centru în $O(0,0)$ și de rază 2.
- (2p) f) Să se dea un exemplu de ecuație a unei drepte paralele cu dreapta $3x - y - 2 = 0$.

SUBIECTUL II (30p)

- 1.
- (3p) a) Să se determine cel mai mare dintre numerele $a = \sqrt{2}$ și $b = \sqrt[3]{3}$.
- (3p) b) Să se calculeze câte numere naturale de două cifre scrise în baza 10 nu conțin cifrele 2 și 3.
- (3p) c) Să se determine câte numere întregi c verifică inegalitățile $2 < \log_2 c < 3$.
- (3p) d) Să se determine numerele întregi d care verifică egalitatea $\left[\frac{2d}{3}\right] = 2$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .
- (3p) e) Să se dea un exemplu de polinom de gradul al treilea cu coeficienți întregi pentru care produsul rădăcinilor sale este 2.
2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .
- (3p) c) Să se determine cel mai mare dintre numerele $a = f(\sqrt{3})$ și $b = f(2)$.
- (3p) d) Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

Varianta 064

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{R})$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și submulțimea

$$G = \{X \in M_2(\mathbf{R}) \mid A \cdot X = X \cdot A\}.$$

- (4p) a) Să se calculeze A^2 și A^3 .
- (4p) b) Să se arate că $\det(A^n) \neq 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (4p) c) Să se determine rangul matricei A .
- (2p) d) Să se arate că dacă $X \in G$, există $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$.
- (2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ nba^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, unde $a, b \in \mathbf{R}$.
- (2p) f) Să se arate că dacă $X \in M_2(\mathbf{R})$ și $X^n = A$, $n \in \mathbf{N}^*$, atunci $X \in G$.
- (2p) g) Să se rezolve ecuația $X^{2007} = A$ în $M_2(\mathbf{R})$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, g : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ definite prin $f(x) = \ln x$,

$$g(x) = \frac{2x - 2}{x + 1}.$$

- (4p) a) Să se calculeze $f'(1)$ și $g'(1)$.
- (4p) b) Să se arate că $f'(x) \geq g'(x)$, $\forall x \in (0, \infty)$.
- (4p) c) Să se rezolve inecuația $f(x) \geq g(x)$, $x \in [1, \infty)$.
- (2p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.
- (2p) e) Să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.
- (2p) f) Să se arate că $\int_1^2 f(x) dx \geq \int_1^2 g(x) dx$.
- (2p) g) Să se arate că $4 \cdot e^3 < 81$.

Varianta 064

SUBIECTUL I

- a) -1. b) 5. c) 1.
 d) dreapta intersectează cercul într-un singur punct. e) Patru puncte. f)
 $6x - 2y + 1 = 0$.

SUBIECTUL II

1. a) $b > a$. b) 56 de numere. c) trei numere întregi. d) Două numere întregi și anume 3,4.

e) $f = X^3 + 7X^2 - 5X - 2$, $f \neq 0 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{2}{1} = 2$.

2.

a) $f'(x) = \frac{6 - 2x^2}{(x^2 + 3)^2}$. b) $x = \sqrt{3}$ și $x = -3$.

c) $f(\sqrt{3}) < f(2)$ pentru că f este strict descrescătoare pe $[\sqrt{3}, \infty)$; se poate dovedi și prin calcul direct.

d) $y = 0$ este ecuația asymptotei orizontale spre $+\infty$. e) $\ln \frac{4}{3}$.

SUBIECTUL III

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. b) $\det(A^n) = (\det(A))^n = 1^n = 1 \neq 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$

c) $\det(A) = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$.

d) Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Din $A \cdot X = X \cdot A \Rightarrow x = t = a, y = 0, z = b$ și atunci

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbf{R}.$$

e) Se parcurg etapele inducției matematice, folosind:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ nba^{n-1} & a^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 \\ ba^n(n+1) & a^{n+1} \end{pmatrix}.$$

f) $X^{n+1} = X^n \cdot X = A \cdot X$, dar $X^{n+1} = X \cdot X^n = X \cdot A$ și atunci

$$A \cdot X = X \cdot A \Rightarrow X \in G. g) a = 1, b = \frac{1}{2007}.$$

SUBIECTUL IV

a) $f'(1) = 1, g'(1) = 1$.

b) Fie $d(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow d'(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 \geq 0, \forall x > 0$, deci

$$f'(x) \geq g'(x), \forall x > 0.$$

c)

x	0	1	∞
$d'(x)$	+ + + + + + + 0 + + + + + + + + + + + + + +		
$d(x)$	-∞	0 →	∞

Din tabel $\Rightarrow f(x) \geq g(x), \forall x \in [1, \infty)$.

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1} = 0$, am aplicat regula lui l'Hospital.

e) $\int_1^2 \ln x dx = 2 \ln 2 - 1$, am aplicat formula integrării prin părți.

f) Pentru că $f(x) \geq g(x), \forall x \in [1, 2]$, avem $\int_1^2 f(x) dx \geq \int_1^2 g(x) dx$.

g) Din f) rezultă $2 \ln 2 + 3 \leq 4 \ln 3 \Leftrightarrow \ln 4 + \ln e^3 \leq \ln 3^4 \Leftrightarrow 4 \cdot e^3 \leq 81$ și cum e este un număr irațional, se obține $4 \cdot e^3 < 81$.