

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta063

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul vectorului $\vec{v} = \sqrt{2}\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$.
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului determinat de punctele $A(10,0,1)$ și $C(1,0,10)$.
- (4p) c) Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{6}$.
- (4p) d) Să se determine coordonatele simetricului punctului $B(2,1)$ față de axa Ox .
- (2p) e) Să se determine raza cercului de ecuație $x^2 + y^2 = 1$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât să aibă loc egalitatea de numere complexe

$$\frac{i-1}{i+1} = a + bi.$$

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se rezolve în \mathbb{Z}_6 ecuația $\hat{5} \cdot \hat{x} = \hat{2}$.
- (3p) b) Să se calculeze produsul $(2^{10} - 1)(2^9 - 1) \dots (2^{-9} - 1)(2^{-10} - 1)$.
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_2 x^2 = 2$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x + 25^x = 30$.
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $2^n > n^2$.

 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x - x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) d) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe \mathbb{R} .
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (4p) a) Să se calculeze AB și BA .
- (4p) b) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
- (4p) c) Să se verifice că $A^2 = B^2 = I_3$.
- (2p) d) Să se arate că matricea A este inversabilă și să se determine inversa acesteia.
- (2p) e) Să se calculeze determinantul matricei $X = A + A^2 + \dots + A^{2007}$.
- (2p) f) Să se arate că pentru orice matrice $C \in M_3(\mathbf{R})$, există o unică matrice $Y \in M_3(\mathbf{R})$ astfel încât $AY = C$.
- (2p) g) Să se arate că $(AB)^n \neq I_3, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (x+4)^{2008} - x^{2008}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se verifice că $f(-2-x) + f(-2+x) = 0, \forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- (2p) d) Să se rezolve ecuația $f(x) = 0$.
- (2p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{2007}}$.
- (2p) f) Să se calculeze $\int_{-4}^0 f(x) dx$.
- (2p) g) Să se arate că funcția f este concavă pe $(-\infty, -2]$ și convexă pe $[-2, \infty)$.

Varianta 063

SUBIECTUL I

- a) $|\vec{v}| = \sqrt{5}$. b) $9\sqrt{2}$. c) $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. d) $B'(2, -1)$. e) Raza este 1.
 f) Egalitatea devine $i = a + bi \Rightarrow a = 0, b = 1$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $x = \hat{4}$. b) 0. c) 2. d) $x = 1$ este soluția ecuației. e) $\frac{2}{5}$.

2.

- a) $f'(x) = \cos x - 1$. b) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} - \cos 1$. c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \cos 1 - 1$.
 d) Deoarece $|\cos x| \leq 1, \forall x \in \mathbf{R}$, avem $f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbf{R}$, deci f este strict descrescătoare. e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = -\frac{1}{6}$ (am aplicat regula lui l'Hospital).

SUBIECTUL III

- a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) $\det A = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$.
 c) Calcul direct.
 d) $\det A \neq 0 \Rightarrow A$ inversabilă. Din c) $\Rightarrow A^{-1} = A$.
 e) Din c) $\Rightarrow A^{2k} = I_3$ și $A^{2k+1} = A, \forall k = 1, 1003$.

$$X = 1003 \cdot I_3 + 1004 \cdot A = \begin{pmatrix} 2007 & 0 & 0 \\ 1004 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2007 \end{pmatrix}, \det X = -2007^2.$$

- f) Deoarece matricea A este inversabilă și inversa ei este unică, din ecuație, prin înmulțire la stânga cu A rezultă $Y = A^{-1}C = AC$, unică.

- g) $A \cdot B = I_3 + D$, unde $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 \cdot D = D \cdot I_3 = D$.

$(A \cdot B)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k D^k \cdot I_3^{n-k} = I_3 + C_n^1 D + C_n^2 D^2 + \dots + C_n^n D^n$ și D^n sunt elemente
nenegative, mai mult $D^n \neq O_3, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Deci $(A \cdot B)^n \neq I_3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL IV

- a) $f'(x) = 2008 \cdot [(x+4)^{2007} - x^{2007}]$. b) Calcul direct .
 c) $x < x+4, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow x^{2007} < (x+4)^{2007}, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow (x+4)^{2007} - x^{2007} > 0, \forall x \in \mathbf{R}$
 deci $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$, adică f este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
 d) Cum $f(-2) = 0$ și f strict crescătoare $\Rightarrow x = -2$ soluție unică.
 e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{2005}} = 2008 \cdot 4$. f) $\int_{-4}^0 f(x) dx = 0$.
 g) Pentru $x \leq -2 \Rightarrow |x| \geq |x+4| \Rightarrow x^{2006} \geq (x+4)^{2006}$, adică
 $(x+4)^{2006} - x^{2006} \leq 0, \forall x \leq -2$.
 Pentru $x \geq -2 \Rightarrow |x| \leq |x+4| \Rightarrow (x+4)^{2006} - x^{2006} \geq 0, \forall x \geq -2$
 și atunci f este concavă pe $(-\infty, -2]$, respectiv f este convexă pe $[-2, \infty)$.