

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta062

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{2} + \cos \pi$.
- (4p) b) Să se calculeze raza cercului circumscris unui triunghi care are lungimile laturilor de 5, 12 și 13.
- (4p) c) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(2,0), B(1,3), C(-1,1)$.
- (4p) d) Să se calculeze distanța dintre punctele $A(2,0)$ și $B(1,3)$.
- (2p) e) Să se calculeze modulul numărului complex $z = \frac{1-2i}{2+i}$.
- (2p) f) Să se determine partea reală a numărului complex $\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3}\right)^{15}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se calculeze probabilitatea ca alegând un element al mulțimii $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{123}\}$ acesta să fie rațional.
- (3p) b) Să se determine câte elemente are mulțimea $\{1, 3, 5, \dots, 23\}$.
- (3p) c) Să se compare numerele $a = \log_{\frac{1}{2}} 8$ și $b = \log_{\frac{1}{3}} 9$.
- (3p) d) Să se calculeze câte submulțimi cu trei elemente are mulțimea $\{a, b, c, d, e\}$.
- (3p) e) Să se determine în câte moduri se pot permuta literele cuvântului *cablu* astfel încât literele b, a, c să fie mereu alăturate și în această ordine (de exemplu, b, a, c, u, l și l, u, b, a, c sunt corecte).
- 2.
- (3p) a) Să se găsească o funcție neconstantă $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ cu proprietatea că $f(2) = f'(2) = 0$.
- (3p) b) Să se dea un exemplu de sir neconstant care are limita egală cu 2.
- (3p) c) Să se determine ecuația asymptotei spre $+\infty$ la graficul funcției $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}.$$
- (3p) d) Să se dea un exemplu de funcție $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ pentru care $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{4}$.
- (3p) e) Să se arate că funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$ este concavă pe $(-\infty, 0]$ și convexă pe $[0, \infty)$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea G a matricelor cu 3 linii și 3 coloane și care au toate elementele din mulțimea $\{-1, 0, 1\}$ și H mulțimea matricelor din G care au proprietatea că suma elementelor pe fiecare linie și pe fiecare coloană este 0.

$$\text{Se notează cu } E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in G \text{ și } O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (4p) a) Să se calculeze determinantul matricei E și să se determine rangul acesteia.
- (4p) b) Să se calculeze E^2 .
- (4p) c) Să se calculeze E^{2007} .
- (2p) d) Să se găsească o matrice $B \in H$, $B \neq O_3$.
- (2p) e) Să se determine numărul elementelor mulțimii G .
- (2p) f) Să se arate că $E \cdot A = A \cdot E = O_3$, $\forall A \in H$.
- (2p) g) Să se arate că $(E + A)^{2007} = E^{2007} + A^{2007}$, $\forall A \in H$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definite prin $f(x) = e^{-1+x}$,

$g(x) = f(x) - x$ și se definește sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ cu $x_0 = a > 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \geq 0$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$ și $g'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se determine punctele de extrem local ale funcției g .
- (4p) c) Să se arate că $g(x) > 0$, $\forall x > 1$.
- (2p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)}$.
- (2p) e) Folosind metoda inducției matematice, să se arate că $x_n > 1$, $\forall n \geq 0$.
- (2p) f) Să se arate că sirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este crescător.
- (2p) g) Să se demonstreze că $\int_1^e \frac{1}{x + e^{x-1}} dx < \frac{1}{2}$.

Varianta 062

SUBIECTUL I

a) 0. b) $R = \frac{13}{2}$. c) aria este 4. d) $\sqrt{10}$. e) modulul este 1.

f) Partea reală a acestui număr este $\cos 5\pi = -1$.

SUBIECTUL II

1.

a) $\frac{11}{123}$. b) 12 elemente. c) $a = -3, b = -2 \Rightarrow b > a$. d) $C_5^3 = 10$. e) 6.

2.

a) $f(x) = (x - 2)^2, f'(x) = 2(x - 2)$. Avem $f(2) = f'(2) = 0$.

b) $x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^*$. c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ este ecuația asymptotei

orizontale spre $+\infty$. d) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x$.

e) $f''(x) = 6x, f''(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty, 0]$ și $f''(x) \geq 0, \forall x \in [0, \infty)$, deci funcția este concavă pe $(-\infty, 0]$ și convexă pe $[0, \infty)$.

SUBIECTUL III

a) $\det E = 0$ și rangul matricei este 1. b) $E^2 = 3 \cdot E$. c) $E^{2007} = 3^{2006} \cdot E$.

d) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

e) $\text{card}(G) = 3^9$. f) $E \cdot A = A \cdot E = O_3$; fiecare element din $E \cdot A$, respectiv

$A \cdot E$ este egal cu suma elementelor de pe o anumită linie, respectiv coloană a matricei $A, A \in H$.

g) $(E + A)^{2007} = \sum_{k=0}^{2007} C_{2007}^k A^k \cdot E^{2007-k} = E^{2007} + A^{2007}$ (vezi punctul f)).

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = e^{-1+x}, g'(x) = e^{-1+x} - 1$. b) $g'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ este punct de minim local.

c) g crescătoare pe $(1, \infty) \Rightarrow g(x) > g(1) = 0, \forall x > 1$.

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x}{f(x)} = 1.$

e) Prin verificare, $x_n > 1, \forall n \geq 0.$

f) $0 < g(x_n) = f(x_n) - x_n = x_{n+1} - x_n, \forall x_n > 1,$ sirul este crescător.

g) Din c) avem $e^{x-1} > x.$ Atunci $x + e^{x-1} > 2x, \forall x > 1.$ Deci

$$\int_1^e \frac{1}{x + e^{x-1}} dx < \int_1^e \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2}.$$