

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta061

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate xOy , se consideră punctele

$$A(1,1), B(2,2), C(0,4) \text{ și } D(-4,0).$$

- (4p) a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ dacă punctele C și D aparțin dreptei de ecuație $ax + by + 4 = 0$.
- (4p) b) Să se determine ecuația paralelei prin punctul C la dreapta AB .
- (4p) c) Să se determine coordonatele mijlocului segmentului $[CD]$.
- (4p) d) Să se determine ecuația cercului care are ca diametru segmentul $[BC]$.
- (2p) e) Să se calculeze $\cos(\hat{BAC})$.
- (2p) f) Să se calculeze aria patrulaterului $ABCD$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se determine câte numere întregi n verifică relația $\frac{2n^2 - 11n + 5}{2n^2 + 11} \leq 0$.
- (3p) b) Să se calculeze determinantul matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.
- (3p) c) Să se determine numărul întreg m pentru care matricea $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ m & 3 \end{pmatrix}$ are rangul 1.
- (3p) d) Să se determine cel mai mare număr natural nenul p pentru care $\log_3 p < 2$.
- (3p) e) Să se arate că $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{27 \cdot 28} = 1 - \frac{1}{28}$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 2$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) c) Să se determine câte puncte de extrem local are funcția f .
- (3p) d) Să se determine câte rădăcini reale are ecuația $f(x) = 0$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2n)}{f(n)}$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

SUBIECTUL III (20p)

Conjugatul unui număr complex $z = a + b \cdot i$, $a, b \in \mathbf{R}$, este numărul $\bar{z} = a - b \cdot i$.

Pe mulțimea \mathbf{C}^* a numerelor complexe nenule se definește legea de compoziție "◦"

prin $x \circ y = \frac{\bar{x}}{y}$, $\forall x, y \in \mathbf{C}^*$ și se consideră mulțimea $A = \{z \in \mathbf{C}^* \mid z^3 = 1\}$.

- (4p) a) Să se calculeze conjugatele numerelor $y_1 = 1 - i$ și $y_2 = 1$.
- (4p) b) Să se determine $m, n \in \mathbf{R}$ astfel încât $(1 - i) \circ (1 - i) = m + n \cdot i$.
- (4p) c) Să se arate că există $u \in \mathbf{C}^*$ astfel încât $x \circ u = x, \forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se arate că **nu** există $v \in \mathbf{C}^*$ astfel încât $x \circ v = x, \forall x \in \mathbf{C}$.
- (2p) e) Să se arate că $z \cdot \bar{z} \in \mathbf{R}$, $\forall z \in \mathbf{C}^*$.
- (2p) f) Să se arate că există $\omega \in \mathbf{C}^*$ astfel încât $A = \{1, \omega, \bar{\omega}\}$.
- (2p) g) Să se arate că "◦" este lege de compoziție pe mulțimea A .

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \arctgx + \frac{1}{x}, \quad g : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, \quad g(x) = 1 + x \cdot \arctgx$$

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$ și $g'(x)$, $x \in [0, \infty)$.
- (4p) b) Să se arate că $\frac{1}{x} > \frac{x}{1+x^2}$, $\forall x \geq 1$.
- (4p) c) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe $[1, \infty)$ și funcția g este convexă pe $[1, \infty)$.
- (2p) d) Să se arate că funcția g este strict crescătoare pe $[1, \infty)$.
- (2p) e) Să se calculeze $\int_1^e \frac{f(x)}{g(x)} dx$.
- (2p) f) Să se calculeze $\int_0^1 g(x) dx$.
- g) Folosind eventual punctele b) și c), să se arate că
- (2p) $\frac{\sqrt{2007}}{2008} + \operatorname{arctg} \sqrt{2007} \in \left[\frac{\pi+2}{4}, \frac{\pi+4}{4} \right]$.

Varianta 061

SUBIECTUL I

- a) $a=1, b=-1$. b) $m_{AB} = 1 \Rightarrow x - y + 4 = 0$ este ecuația dreptei cerute.
 c) $\left(\frac{0-4}{2}, \frac{4+0}{2} \right) = (-2, 2)$. d) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 2$. e) $\cos(\overline{BAC}) = \frac{\sqrt{5}}{5}$. f) 10.

SUBIECTUL II

1.

- a) $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. b) $\det A = 1$. c) $\text{rang } B = 1 \Leftrightarrow \det B = 6 - m = 0 \Rightarrow m = 6$.
 d) Inecuația se mai scrie $p < 3^2 \Rightarrow p = 8$. e) $\frac{27}{28}$.

2.

- a) $f'(x) = 3x^2 - 3$. b) $\frac{3}{4}$. c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$, avem două puncte de extrem local.
 d) Ecuația are trei rădăcini reale. e) 8.

SUBIECTUL III

- a) $\bar{y}_1 = 1+i, \bar{y}_2 = 1$. b) $(1-i) \circ (1-i) = \frac{1+i}{1-i} = i \Leftrightarrow i = m+n \cdot i \Rightarrow m=0, n=1$.
 c) u=1.
 d) Dacă ar exista $v \in \mathbf{C}^*$ astfel încât $x \circ v = x, \forall x \in \mathbf{C}$ atunci $\frac{\bar{x}}{v} = x \Rightarrow v = \frac{\bar{x}}{x}$ care depinde de x , iar pentru $x = 0$ nici nu există. Contradicție.
 e) $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbf{R}$.
 f) Ecuația $z^3 = 1$ are soluțiile $z_1 = 1, z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ și $z_3 = \bar{z}_2$. Notând $z_2 = w$, avem $A = \{1, w, \bar{w}\}$.
 g) $x, y \in A, x \circ y = \frac{\bar{x}}{y} \neq 0, \forall x, y \in \mathbf{C}^*$, deci $x \circ y \in A$ (sau se poate face tabla operației).

SUBIECTUL IV

- a) $f'(x) = -\frac{1}{x^2 \cdot (x^2 + 1)}, g'(x) = \arctg x + \frac{x}{1+x^2}$. b) $\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} > \frac{x}{x^2 + 1}, \forall x \geq 1$.
 c) Derivata întâi este negativă pe \mathbf{R} , deci f este strict descrescătoare pe $[1, +\infty)$. Avem $g''(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2} > 0, \forall x \in [1, +\infty)$, deci g este convexă pe intervalul cerut.
 d) $g''(x) > 0, \forall x \geq 1 \Rightarrow g'$ este strict crescătoare pe $[1, +\infty)$, deci $g'(x) \geq g'(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} > 0, \forall x \geq 1$. Atunci g este strict crescătoare pe $[1, +\infty)$. e) 1.
 f) $\frac{\pi+2}{4}$ (s-a folosit formula de integrare prin părți).

g) $g'(1) < g'(\sqrt{2007}) < f(\sqrt{2007}) < f(1)$, deci $\frac{\pi+2}{4} < \frac{\sqrt{2007}}{2008} + \arctg\sqrt{2007} < \frac{\pi+4}{4}$, de unde rezultă ceea ce trebuia demonstrat.