

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D**
***Varianta ....060***

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze partea reală a numărului complex  $(2 - i)^2$ .
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului determinat de punctele  $A(6, 7)$  și  $C(7, 6)$ .
- (4p) c) Să se calculeze  $\cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3}$ .
- (4p) d) Să se determine coordonatele simetricului punctului  $A(2, 2)$  față de axa  $Oy$ .
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele  $A(6, 7)$ ,  $B(5, 5)$  și  $C(7, 6)$ .
- (2p) f) Să se determine ecuația tangentei la elipsa  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$  în punctul  $P(2, 1)$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1.

- (3p) a) Să se rezolve în mulțimea  $\mathbf{Z}_4$  ecuația  $\hat{3} \cdot \hat{x} = \hat{2}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $(f \circ g)(3)$  pentru  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x - 2$ .
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ .
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^x + 8^x = 10$ .
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  să verifice relația  $3^n > n^3$ .
2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = e^x + x + 1$ .
- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- (3p) c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .
- (3p) d) Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbf{R}$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 + 5}{2n^2 + 7}$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

În mulțimea  $M_2(\mathbf{R})$  se consideră matricea  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și submulțimea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \mid a \in (0, \infty), b \in \mathbf{R} \right\}.$$

- (4p) a) Să se verifice că  $I_2 \in G$ .
- (4p) b) Să se arate că dacă  $A, B \in G$ , atunci  $A \cdot B \in G$ .
- (4p) c) Să se arate că dacă  $A \in G$ , atunci  $\det(A) \neq 0$ .
- (2p) d) Să se arate că dacă  $C \in G$ , atunci există  $D \in G$ , astfel încât  $C \cdot D = D \cdot C = I_2$ .
- (2p) e) Să se găsească două matrice  $S, T \in G$  pentru care  $S \cdot T \neq T \cdot S$ .
- (2p) f) Să se calculeze  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}^{2007}$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$ .
- (2p) g) Să se demonstreze că, pentru orice matrice  $A \in G$  și  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ , există o matrice  $X \in G$  astfel încât  $X^n = A$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcțiile  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^8$ ,  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$g(x) = x^9 + 1, \quad \forall x \in \mathbf{R} \text{ și } F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad F(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^9}{9},$$

$$\forall x \in \mathbf{R}.$$

- (4p) a) Să se calculeze  $f(-1)$  și  $g(-1)$ .
- (4p) b) Să se verifice că  $(x+1)f(x) = g(x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) c) Să se arate că dacă  $x < -1$ , atunci  $g(x) < 0$  și dacă  $x > -1$ , atunci  $g(x) > 0$ .
- (2p) d) Să se arate că  $f(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (2p) e) Să se arate că funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$  pe  $\mathbf{R}$ .
- (2p) f) Să se arate că funcția  $F$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- (2p) g) Să se arate că funcția  $F$  este bijectivă.

## Varianta 060

### SUBIECTUL I

a) 3. b)  $\sqrt{2}$ . c)  $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ . d) Simetricul punctului  $A$  este  $B(-2,2)$ . e)  $\frac{3}{2}$ .

f)  $x + 2y - 4 = 0$  este ecuația căutată.

### SUBIECTUL II

1.

a)  $\hat{x} = \hat{2}$ . b)  $f(g(3)) = f(1) = 1$ . c)  $x \in \{-1, 1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ . d)  $x = 1$ . e)  $P = \frac{4}{5}$ .

2.

a)  $f'(x) = e^x + 1$ . b)  $e + \frac{1}{2}$ . c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 2$ .

d)  $f''(x) = e^x > 0$ , pentru orice număr real, deci funcția este convexă. e) 4.

### SUBIECTUL III

a) pentru  $a = 1, b = 0 \Rightarrow I_2 \in G$ .

b)  $A \cdot B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ ba' + b' & 1 \end{pmatrix} \in G$ . c)  $\det A = a \neq 0$ .

d) există matricea  $D = C^{-1}$ , unde  $C^{-1}$  este inversa matricei  $C$ .

e) Matricele  $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$  verifică  $S \cdot T \neq T \cdot S$ .

f) Se demonstrează prin inducție matematică, că

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ b \cdot (1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}) & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

prin urmare  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}^{2007} = \begin{pmatrix} a^{2007} & 0 \\ b \cdot (1 + a + \dots + a^{2006}) & 1 \end{pmatrix}$ .

g) Fie  $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$ . Ecuația  $X^n = A$ , folosind punctul f), devine

$$\begin{pmatrix} x^n & 0 \\ y \cdot (1+x+x^2+\dots+x^{n-1}) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x^n = a, y = \frac{b}{1+x+\dots+x^{n-1}}, \quad \text{adică}$$

$$x = \sqrt[n]{a}, y = \frac{b}{1 + \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{a^2} + \dots + \sqrt[n]{a^{n-1}}}.$$

#### SUBIECTUL IV

- a)  $f(-1) = 9, g(-1) = 0$ .
- b) Prin calcul direct se arată egalitatea cerută.
- c) Dacă  $x < -1 \Rightarrow x^9 < -1 \Leftrightarrow x^9 + 1 < 0$ , deci  $g(x) < 0$ , iar dacă  $x > -1 \Rightarrow x^9 > -1 \Leftrightarrow x^9 + 1 > 0$ , adică  $g(x) > 0$ .
- d) Din b) avem  $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x+1}, & x \neq -1 \\ 9, & x = -1 \end{cases}$ .
- Din c) se obține că  $\frac{g(x)}{x+1} > 0, \forall x \in \mathbf{R} - \{-1\}$ . Cum  $f(-1) = 9$ , obținem că  $f(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$ .
- e) Funcția  $F$  este derivabilă pe  $\mathbf{R}$  și prin derivare obținem  $F'(x) = f(x)$ . Deci  $F$  este o primitivă a funcției  $f$  pe  $\mathbf{R}$ .
- f) Avem  $F'(x) = f(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$  (vezi d)), deci funcția  $F$  este strict crescătoare pe  $\mathbf{R}$ .
- g) Din punctul anterior deducem că  $F$  este injectivă. Cum  $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} F(x) = \mp\infty$  și  $F$  este continuă pe  $\mathbf{R} \Rightarrow F$  este surjectivă. În concluzie,  $F$  este bijectivă.