

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta059

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze conjugatul numărului complex $1 + 7i$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $D(-1, -2)$ la dreapta $x + y - 4 = 0$.
- (4p) c) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(1, 2), B(0, 2)$ să aparțină dreaptei de ecuație $ax + by + 2 = 0$.
- (4p) d) Să se arate că punctele $L(-1, 2), M(-2, 3)$ și $N(-3, 4)$ sunt coliniare.
- (2p) e) Să se calculeze lungimea diagonalei patratului cu perimetru 20.
- (2p) f) Să se calculeze perimetrul unui triunghi echilateral cu aria $16\sqrt{3}$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Dacă într-o progresie geometrică primul termen este -2 și rația este 2, să se calculeze termenul al patrulea.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ să verifice relația $n + 9 < 3^n$.
- (3p) c) Dacă funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + 1$ are inversa $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, să se calculeze $g(2)$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 + 7) = 3$.
- (3p) e) Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f = X^3 - X - 24 \in \mathbf{R}[X]$.

 2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 10$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x) dx$.

- (3p) c) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .

- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{5x^3}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimile $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbf{R}^*, b \in \mathbf{R} \right\}$ și $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbf{R}^* \right\}$.

- (4p) a) Să se arate că $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$.
- (4p) b) Să se arate că dacă $X, Y \in G$, atunci $X \cdot Y \in G$.
- (4p) c) Să se arate că dacă $X, Y \in H$, atunci $X \cdot Y \in H$.
- (2p) d) Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ a & 1 \end{pmatrix}$ sunt două elemente din G , să se calculeze $A \cdot B$ și $B \cdot A$.
- (2p) e) Să se arate că dacă $X \in H$, atunci există $Y \in H$ astfel încât $X \cdot Y = Y \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (2p) f) Să se arate că mulțimea H înzestrată cu operația de înmulțire a matricelor formează o structură de grup comutativ.
- (2p) g) Să se calculeze matricea $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2007}$, unde $a \in \mathbf{R}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ și sirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

- (4p) a) Să se calculeze a_1 .
- (4p) b) Să se determine ecuația asymptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- (4p) c) Să se verifice că $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$, $\forall x > 0$.
- (2p) d) Să se calculeze $f'(x)$, $x > 0$.
- (2p) e) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $a_n = \ln(n+1)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- (2p) g) Să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.

Varianta 059

SUBIECTUL I

a) $1 - 7i$. b) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. c) $a = 0$ și $b = -1$.

d) Deoarece $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$, punctele $L(-1, 2)$, $M(-2, 3)$ și $N(-3, 4)$ sunt coliniare. e) $5\sqrt{2}$. f) $3 \cdot 8 = 24$.

SUBIECTUL II

1.

a) $a_4 = a_1 \cdot q^3 = -16$. b) $\frac{2}{5}$. c) $f(1) = 2 \Rightarrow g(2) = 1$.

d) Ecuația devine $x^2 + 7 = 2^3 \Rightarrow x \in \{-1, 1\}$. e) Suma rădăcinilor este 0.

2.

a) $f'(x) = 3x^2 - 3$. b) $\int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = -2$.

c) $f'(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$ sunt puncte de extrem local. Coordonatele punctelor de extrem local sunt $A(-1; 12), B(1; 8)$.

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 0$. e) $\frac{1}{5}$.

SUBIECTUL III

a) Pentru $a = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$.

b) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a, x \in \mathbf{R}^*, b, y \in \mathbf{R}$. $X \cdot Y = \begin{pmatrix} ax & ay + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ pentru că $ax \in \mathbf{R}^*$, $ay + b \in \mathbf{R}$.

c) Dacă $X, Y \in H, a, b \in \mathbf{R}^*$, $X \cdot Y = \begin{pmatrix} ab & 1-ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, pentru că $ab \in \mathbf{R}^*$.

d) $A \cdot B = B \cdot A = I_2$.

e) Pentru $X = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alegând $Y = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & 1 \end{pmatrix}$, din d), obținem

$$X \cdot Y = Y \cdot X = I_2, \text{ evident } Y \in H.$$

f) Veficarea axiomelor de grup comutativ.

g) Se demonstrează prin inducție matematică că

$$\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 1-a^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall a \in \mathbf{R}^* \text{ și } \forall n \in \mathbf{N}^*. \text{ Pentru } n = 2007 \text{ se obține}$$

$$\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2007} = \begin{pmatrix} a^{2007} & 1-a^{2007} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

SUBIECTUL IV

a) $a_1 = f(1) = \ln 2$.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ este ecuația asymptotei orizontale la graficul funcției f .

c) Folosind proprietățile logaritmilor, avem $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(x+1) - \ln(x)$

pentru orice $x > 0$.

d) $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$.

e) Considerăm $P(n)$: $a_n = \ln(n+1)$.

Propoziția $P(1)$: $a_1 = \ln 2$ este adevărată. Presupunem $P(k)$: $a_k = \ln(k+1)$ adevărată și demonstrăm că $P(k+1)$: $a_{k+1} = \ln(k+2)$ este adevărată. Avem

$$a_{k+1} = f(1) + f(2) + \dots + f(n) + f(n+1) = a_k + f(n+1) = \ln(k+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$\ln(k+1) + \ln(k+2) - \ln(k+1) = \ln(k+2).$$

Am arătat că $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, deci $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$.

g) Folosind integrarea prin părți avem

$$\int_1^2 [\ln(x+1) - \ln(x)] dx = \int_1^2 \ln(x+1) dx - \int_1^2 \ln x dx = 3 \ln 3 - 4 \ln 2.$$