

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta058

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordonate Oxy , se consideră punctele $A(1,5)$, $B(-3,1)$, $C(2,4)$.

- (4p) a) Să se calculeze partea reală a numărului complex $i + 2i^2 + 3i^3$.
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului $[AC]$.
- (4p) c) Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic.
- (4p) d) Să se calculeze aria triunghiului ABC .
- (2p) e) Să se determine $m, n \in \mathbf{R}$ astfel încât $x + my + n = 0$ să reprezinte ecuația dreptei BC .
- (2p) f) Să se calculeze $\cos(\hat{CBA})$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{9x} - 9^{2007} = 0$.
- (3p) b) Se consideră sirul $3, 7, 11, 15, \dots$ de numere reale care este o progresie aritmetică. Să se determine al 10-lea termen al sirului.
- (3p) c) Să se determine câte numere naturale de 3 cifre distințe, care se pot forma cu elementele mulțimii $\{0, 1, 2, 5\}$ sunt multipli de 4.
- (3p) d) Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2x - 1$. Să se calculeze $(f \circ f)(1)$.
- (3p) e) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $xC_5^3 \leq 100$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 7$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.
- (3p) d) Să se determine coordonatele punctului de extrem local al funcției f .
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^7 f(0)}{f(3) - n^7}$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

Varianta 058

SUBIECTUL III (20p)

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$,
 $\forall x, y \in \mathbf{R}$.

- (4p) a) Să se arate că $x \circ y = (x+3)(y+3)-3$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se determine $e \in \mathbf{R}$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se arate că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$
- (2p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x \circ 3^x = 13$.
- (2p) e) Să se arate că $x \circ (-3) \circ y = -3$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.
- (2p) f) Să se arate că $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ nu este parte stabilă a lui \mathbf{R} în raport cu legea de compoziție „ \circ ”.
- (2p) g) Să se calculeze $(-1) \circ 2 \circ (-3) \circ \dots \circ 2006 \circ (-2007)$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$.

- (4p) a) Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f .
- (4p) b) Să se arate că $f'(x) + f'(-x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.
- (2p) d) Să se arate că $1 \leq f(x) \leq 2$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Să se arate că există $a, b \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, $a \neq b$ pentru care $f(a) = f(b) \in \mathbf{Q}$.
- (2p) f) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (2p) g) Să se arate că $1 \leq \frac{1}{e-1} \cdot \int_0^1 e^x \cdot f(x) dx \leq 2$.

Varianta 058

SUBIECTUL I

a) -2 . b) $AC = \sqrt{2}$. c) triunghiul este dreptunghic în A. d) Aria este 4.

e) $m = -\frac{5}{3}, n = \frac{14}{3}$. f) $\cos B = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{34}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $x = 446$. b) Al 10-lea termen al progresiei este 39. c) 4 numere: 120, 520, 512, 152. d) $f(f(1)) = 1$. e) $x \in (-\infty, 10]$.

2.

a) $f'(x) = 2x$. b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3) = 6$. c) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{22}{3}$.

d) $x = 0$ punct de extrem local. e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^7 \cdot 7}{16 - n^7} = -7$.

SUBIECTUL III

a) $(x+3)(y+3) - 3 = xy + 3x + 3y + 9 - 3 = xy + 3x + 3y + 6 = x \circ y$.

b) $e = -2$. c) Prin calcul direct se demonstrează asociativitatea.

d) Ecuația devine $(3^x + 3)^2 = 16$ și admite doar soluția $x = 0$.

e) $x \circ (-3) = (x+3)(-3+3) - 3 = -3 \Rightarrow (-3) \circ y = -3, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

f) Trebuie să demonstrăm că există $x, y \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ astfel încât $x \circ y \notin \mathbf{R} - \mathbf{Q}$. Fie $x = \sqrt{3}$ și $y = -\sqrt{3}$, atunci $x \circ y = 9 - 3 - 3 = 3 \notin \mathbf{R} - \mathbf{Q}$. (se mai poate face alegerea $x = \sqrt{3} + 3$ și $y = \sqrt{3} - 9$).

g) Conform punctului e) rezultatul calcului este -3 .

SUBIECTUL IV

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, deci ecuația cerută este $y = 1$.

b) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}, \forall x \in \mathbf{R}$. Finalizarea vă aparține!

c) $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbf{R}$, de unde concluzia e imediată.

d) $x = 0$ este punct de maxim global pentru f , deci $f(x) \leq f(0) = 2, \forall x \in \mathbf{R}$, iar cealaltă inegalitate e echivalentă cu $x^2 + 1 \leq x^2 + 2$ care e evident adevărată $\forall x \in \mathbf{R}$ (e chiar strictă!). Desigur, și inegalitatea din dreapta se poate demonstra elementar.

e) de exemplu, $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = \frac{4}{3} \in \mathbf{Q}$.

f) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right) dx = 1 + \frac{\pi}{4}$

g) Folosim d) și deducem $e^x \leq e^x \cdot f(x) \leq 2 \cdot e^x$. Integrăm aceste inegalități pe intervalul $[0,1]$, calculăm și ajungem imediat la concluzia dorită.