

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta057

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex $z = (1-i)^2$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $O(0,0)$ la punctul $A(4,-3)$.
- (4p) c) Să se arate că punctul $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ aparține cercului de ecuație $x^2 + y^2 = 1$.
- (4p) d) Să se calculeze $\tg 3 \cdot \ctg 3$.
- (2p) e) Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al triunghiului cu vârfurile în punctele $A(1, 3, 2)$, $B(3, 2, 1)$, $C(2, 1, 3)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $P(2,3)$ și $Q(3,2)$ să aparțină dreptei de ecuație $x + ay + b = 0$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se verifice identitatea $\hat{x}^3 = \hat{x}$, $\forall \hat{x} \in \mathbf{Z}_6$.
- (3p) b) Să se arate că $(\hat{x} + \hat{y})^3 = \hat{x}^3 + \hat{y}^3$, $\forall \hat{x}, \hat{y} \in \mathbf{Z}_6$.
- (3p) c) Dacă funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 3x + 1$ are inversă $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, să se calculeze $g(1)$.
- (3p) d) Să se rezolve în multimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 + 7) = \log_2(2x^2 + 3x + 7)$.
- (3p) e) Să se calculeze suma pătratelor rădăcinilor polinomului $f = X^3 - X^2 - 24X + 1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 4) - \ln(x^2 + 1)$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x) dx$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ și strict descrescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) e) Să se arate că $0 < f(x) \leq \ln 4$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

Varianta 057

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{Q})$ se consideră submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \middle| a^2 - 2b^2 = 1, a, b \in \mathbf{Q} \right\}$.

- (4p) a) Să se verifice că $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.
- (4p) b) Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.
- (4p) c) Să se calculeze $\det(A)$, unde $A \in G$.
- (2p) d) Să se arate că, dacă $X \in G$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, atunci X este matrice inversabilă și $X^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -2b & a \end{pmatrix} \in G$.
- (2p) e) Să se găsească o matrice $A \in G$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ cu $b \neq 0$.
- (2p) f) Să se arate că dacă $B \in G$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ cu $a > 0$, $b > 0$, atunci $B^n \neq I_2$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) g) Să se arate că mulțimea G conține cel puțin 2007 elemente.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(1+x) - x$ și

$$g : (-1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

- (4p) a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{-x}{1+x}$ și $g'(x) = \frac{x^2}{1+x}$, $\forall x > -1$.
- (4p) b) Să se calculeze $f'(0)$ și $g'(0)$.
- (4p) c) Să se arate că $f(x) < 0 < g(x)$, $\forall x > 0$.
- (2p) d) Să se arate că $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) e) Utilizând metoda inducției matematice să se arate că $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+3+5+\dots+(2n-1))n}{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2}$.
- (2p) g) Să se arate că $\frac{1}{3} < \int_0^1 \ln(1+x) dx < \frac{1}{2}$.

Varianta 057

SUBIECTUL I

a) $z = -2i \Rightarrow |z| = 2$. b) $AO = 5$.

c) Deoarece $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$, rezultă că punctul B este situat pe cercul dat.

d) $\operatorname{tg}3 \cdot \operatorname{ctg}3 = \operatorname{tg}3 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}3} = 1$. e) $G(2,2,2)$. f) $a = 1, b = -5$.

SUBIECTUL II

1.

a) Calcul direct.

b) Conform punctului a), avem $\left(\hat{x} + \hat{y}\right)^3 = \hat{x}^3 + \hat{y}^3 = \hat{x}^3 + \hat{y}^3, \forall \hat{x}, \hat{y} \in \mathbf{Z}_6$.

c) Deoarece $f(0) = 1$, avem $g(1) = 0$.

d) Ecuația devine: $(x^2 + 7) = (2x^2 + 3x + 7) \Leftrightarrow x \in \{-3, 0\}$.

e) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 49$.

2.

a) $f'(x) = \frac{-6x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$. b) $\int_0^1 f'(x) dx = f(x)|_0^1 = \ln 5 - \ln 8$.

c) $f'(x) \geq 0, \forall x \in (-\infty, 0]$, deci f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$ și $f'(x) \leq 0, \forall x \in [0, \infty)$, deci funcția f este strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = -\frac{3}{5}$.

e) $1 < \frac{x^2 + 4}{x^2 + 1} \leq 4, \forall x \in \mathbf{R}$ și atunci $0 < \ln(x^2 + 4) - \ln(x^2 + 1) \leq \ln 4, \forall x \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL III

a) Pentru $a = 1, b = 0$ și $1^2 - 2 \cdot 0 = 1$ avem $I_2 \in G$.

b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}, a^2 - 2b^2 = 1$ și $B = \begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix}, x^2 - 2y^2 = 1, A, B \in G$. Prin

calcul direct obținem $A \cdot B = \begin{pmatrix} u & v \\ 2v & u \end{pmatrix}$ cu $u^2 - 2v^2 = 1$, deci $A \cdot B \in G$.

c) $\det A = 1$.

- d) $\det X = a^2 - 2b^2 = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists X^{-1}$, se verifică egalitățile
 $X \cdot X^{-1} = X^{-1} \cdot X = I_2$. $\det(X^{-1}) = a^2 - 2b^2 = 1$ și atunci $X^{-1} \in G$.
- e) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in G$. f) Arătăm inducțiv că dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d > 0$, atunci $X^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ cu $a_n, b_n, c_n, d_n > 0$. Într-adevăr, pentru $n=1$ este adevărat, iar pentru demonstrația $P_n \Rightarrow P_{n+1}$, observăm că
- $$X^{n+1} = X^n \cdot X = \begin{pmatrix} aa_n + cb_n & ba_n + db_n \\ ac_n + cd_n & bc_n + dd_n \end{pmatrix}. \text{ Deci } B^n \neq I_2, \forall n \in \mathbf{N}^*, \text{ deoarece } b_n > 0.$$
- g) Din f) rezultă că B, B^2, B^3, \dots, B^n sunt matrice diferite pentru că, dacă $\exists \alpha, \beta \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $B^\alpha = B^\beta \mid B^{-\alpha} \Rightarrow B^{\beta-\alpha} = I_2$, contradicție cu f). Deci G conține cel puțin 2007 elemente.
- SUBIECTUL IV**
- a) Calcul direct.
- b) $f'(0) = 0, g'(0) = 0$.
- c) Avem $f'(x) < 0, \forall x > 0$, deci f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$ și atunci $f(x) < \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$. Avem $g'(x) > 0, \forall x > 0 \Rightarrow g$ strict crescătoare pe $(0, \infty)$, astfel $g(x) > \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = 0$. Deci $f(x) < 0 < g(x), \forall x > 0$.
- d) $1 + 3 + \dots + (2n-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2, \forall n \in \mathbf{N}^*$.
- e) Fie $P(n)$ egalitatea de demonstrat. După parcurgerea etapei de verificare vom demonstra $P(n) \rightarrow P(n+1)$.
- $$\begin{aligned} P(n+1) : & \underbrace{1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2}_{\frac{n(4n^2-1)}{3}} + (2n+1)^2 = (2n+1) \cdot \left[\frac{n(2n-1)}{3} + (2n+1) \right] \\ & = \frac{n[4(n+1)^2 - 1]}{3}. \text{ Rezultă } P(n) \text{ adevărată } \forall n \in \mathbf{N}^*. \end{aligned}$$
- f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n(4n^2-1)} = \frac{3}{4}$.

g) Folosind c) rezultă $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x, \forall x > 0$. Atunci

$$\int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{2} \right) dx < \int_0^1 \ln(1+x) dx < \int_0^1 x dx.$$

După calcularea integralelor rezultă

$$\frac{1}{3} < \int_0^1 \ln(1+x) dx < \frac{1}{2}.$$