

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta055

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex $\sqrt{5} + i\sqrt{3}$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $E(1,2)$ la dreapta $x + y + 1 = 0$.
- (4p) c) Să se scrie ecuația cercului cu centru în $E(1,2)$ și care este tangent dreptei de ecuație $x + y + 1 = 0$.
- (4p) d) Să se arate că punctele $L(1, 2)$, $M(3, 3)$ și $N(5, 4)$ sunt coliniare.
- (2p) e) Să se calculeze $\sin 30^\circ + \sin(-30^\circ)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât să aibă loc egalitatea de numere complexe $(2+3i)(4+5i) = a+bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se dea un exemplu de două numere întregi a și b nenule pentru care numărul $\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}$ este întreg.
- (3p) b) Să se dea un exemplu de polinom de gradul al doilea cu coeficienți întregi pentru care una dintre rădăcini este $x_1 = 3 + \sqrt{2}$.
- (3p) c) Să se dea un exemplu de matrice $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ pentru care $\det A = \det B$ și $\text{rang } A \neq \text{rang } B$.
- (3p) d) Să se dea un exemplu de număr real $x \geq 3$ pentru care $\log_2 x \leq 4$.
- (3p) e) Să se dea un exemplu de funcție neconstantă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $f(1) + f(2) = 3$.

 2. Se consideră sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin: $a_n = n^2 + n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- (3p) a) Să se determine care număr este mai mare: $A = \frac{5}{a_3}$ sau $B = \frac{3}{a_5}$.
- (3p) b) Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $a_n = 21$.
- (3p) c) Să se dea un exemplu de număr natural care nu este termen al sirului $(a_n)_{n \geq 1}$.
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{n+1}$.
- (3p) e) Să se arate că sirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător.

SUBIECTUL III (20p)

Pe mulțimea \mathbf{Z} a numerelor întregi se definește legea de compoziție " \circ " prin $a \circ b = r$, unde r este restul împărțirii produsului $a \cdot b$ la 10 și se consideră mulțimea $G = \{2, 4, 6, 8\}$.

- (4p) a) Să se calculeze $A = 4 \circ 6$ și $B = 7 \circ 2007$.
- (4p) b) Să se dea un exemplu de numere întregi cu $a > 3, b > 3$ pentru care $a \circ b = 3$.
- (4p) c) Să se arate că există $e \in G$ astfel încât pentru orice $x \in G$ să avem $e \circ x = x \circ e = x$.
- (2p) d) Să se determine un element $y \in G$ astfel încât $y \circ 8 = 6$.
- (2p) e) Să se arate că G are o structură de grup comutativ în raport cu legea de compoziție " \circ ".
- (2p) f) Să se arate că nu există $x \in \mathbf{Z}$ pentru care $x \circ x = 2$.
- (2p) g) Să se arate că există cel puțin 2007 numere naturale m pentru care $(2^m) \circ (2^m) = 4$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^4 - 4x + 1$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se determine punctul de extrem local al funcției f .
- (4p) c) Să se arate că $f(x) \geq 2x \cdot (x - 2)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbf{R} .
- (2p) e) Să se calculeze $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx$.
- (2p) f) Să se calculeze $\int_2^e \frac{x^3 - 1}{f(x)} dx$.
- (2p) g) Să se arate că $\int_e^{e^2} \frac{x - 2}{f(x)} dx \leq \frac{1}{2}$.

Varianta 055

SUBIECTUL I

a) $2\sqrt{2}$. b) $2\sqrt{2}$. c) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$. d) Din $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow A, B, C$ sunt

coliniare. e) 0 . f) Egalitatea devine $3+4i = a+bi \Rightarrow a=3, b=14$.

SUBIECTUL II

1.

a) Dacă $a=4, b=27$ avem $\sqrt[3]{4+27} = 2+3=5 \in \mathbf{Z}$.

b) $f = X^2 - 6X + 7$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(A)=0 \Rightarrow \text{rang}(A)=1$ și

$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(B)=0, \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(B)=2$. d) $x=4$.

e) $f(x)=x$.

2.

a) $A = \frac{5}{13} > B = \frac{3}{31}$.

b) $a_n = n^2 + n + 1 = 21 \Rightarrow n = 4$.

c) Se poate considera numărul natural 2, deoarece ecuația $n^2 + n + 1 = 2$ nu are rădăcinile numere naturale.

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{n+1} = 2$. e) $a_{n+1} - a_n = 2n + 2 > 0, \forall n \geq 1 \Rightarrow$ sirul este strict crescător.

SUBIECTUL III

a) $A = 4, B = 9$. b) $a = 9, b = 7$.

c)

○	2	4	6	8
2	4	8	2	6
4	8	6	4	2
6	2	4	6	8
8	6	2	8	4

Elementul neutru este $e = 6$.

d) $y = 2$.

e) Asociativitatea se verifică, comutativitatea se vede din tabel, din simetria față de diagonala principală, $e = 6$ iar pentru elementele simetrizabile avem

$$x = 2 \Rightarrow x' = 8$$

$$x = 4 \Rightarrow x' = 4$$

$$x = 6 \Rightarrow x' = 6$$

$$x = 8 \Rightarrow x' = 2$$

Deci (G, \circ) este grup abelian.

f) Nu există x astfel încât $x \circ x = 2$ deoarece ultima cifră a pătratului unui număr natural nu poate fi 2.

g) Folosind ultima cifră a puterilor lui 2 se arată că $2^{2n+1} \circ 2^{2n+1} = 4$, oricare ar fi $n \geq 1$. Deci $2 \circ 2 = 4; 2^3 \circ 2^3 = 4; 2^5 \circ 2^5 = 4; \dots; 2^{4013} \circ 2^{4013} = 4$ și astfel există cel puțin 2007 numere cu proprietatea cerută.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = 4x^3 - 4$.

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot (x^2 + x + 1) = 0$ cu soluția $x = 1$. Cum $f'(x) > 0$ pentru $x > 1$ și $f'(x) < 0$ pentru $x < 1$, rezultă că $x = 1$ este punct de extrem local.

c) $f(x) \geq 2x(x-2) \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 \geq 0$ inegalitate adevărată pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

d) $f''(x) = 12x^2 \geq 0$, deci funcția f este convexă pe \mathbf{R} .

e) $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = \frac{e^4 - 16e + 19}{4}$.

f) Notăm $x^4 - 4x + 1 = t$. Pentru valoarea $x = e$, obținem $e^4 - 4e + 1$ pe care o

$$\text{notăm cu } m. \text{ Avem } \int_2^e \frac{x^3 - 1}{f(x)} dx = \frac{1}{4} \int_9^m \frac{dt}{t} = \frac{1}{4} \ln \frac{e^4 - 4e + 1}{9}.$$

g) Din c) avem $f(x) \geq 2x(x-2), x \in [e, e^2] \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{2x(x-2)} \Leftrightarrow \frac{x-2}{f(x)} \leq \frac{1}{2x}$ și

$$\text{integrând pe intervalul } [e, e^2], \text{ obținem } \int_e^{e^2} \frac{x-2}{f(x)} dx \leq \int_e^{e^2} \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2}.$$