

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta054

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze modulul numărului complex $\cos 1 + i \sin 1$.
- (4p) b) Să se calculeze distanța de la punctul $D(1, 2)$ la punctul $C(0, 1)$.
- (4p) c) Să se calculeze coordonatele punctelor de intersecție dintre cercul de ecuație $x^2 + y^2 = 25$ și dreapta de ecuație $x + y - 1 = 0$.
- (4p) d) Să se arate că punctele $L(5, 2)$, $M(6, 3)$ și $N(7, 4)$ sunt coliniare.
- (2p) e) Să se calculeze distanța de la punctul $A(4, 3)$ la dreapta $x + y = 3$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să aibă loc egalitatea de numere complexe $(\sqrt{3} + i)^4 = a + bi$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se verifice identitatea $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$, $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se arate că, dacă $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz$, unde $x, y, z \in \mathbf{R}$, atunci $x = y = z$.
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x$.
- (3p) d) Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_6$ să verifice relația $\hat{x}^3 = \hat{x}$.
- (3p) e) Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f = X^4 + X^3 - X^2 + 1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x \sin x$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x) dx$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0, 1]$.
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{C})$, se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

- (4p) a) Să se calculeze AB și BA .
- (4p) b) Să se arate că suma elementelor de pe diagonala principală a matricelor AB și BA este aceeași.
- (4p) c) Să se calculeze matricele $A + B$ și $A - B$.
- (2p) d) Să se arate că $\det(A + B) + \det(A - B) = 2(\det(A) + \det(B))$.
- (2p) e) Să se demonstreze că $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- (2p) f) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $\det(A_1 A_2 \dots A_n) = \det(A_1)\det(A_2) \dots \det(A_n)$, $\forall A_1, \dots, A_n \in M_2(\mathbf{C})$ și $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) g) Să se arate că $\det(A^n) = \det^n(A)$, $\forall A \in M_2(\mathbf{C})$ și $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^6$ și $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

- (4p) a) Să se calculeze $f(1)$.
- (4p) b) Să se verifice că $(x-1)f(x) = x^7 - 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se arate că $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se arate că $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Să se arate că funcția F este strict crescătoare pe \mathbf{R} .
- (2p) f) Să se rezolve ecuația $F(x) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{7}$.
- (2p) g) Să se arate că $F(x) < xf(x)$, $\forall x > 0$.

Varianta 054

Subiectul I

a) $|\cos 1 + i \sin 1| = \sqrt{\cos^2 1 + \sin^2 1} = 1$

b) $DC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

c) Rezolvând sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$ obțin soluțiile $\begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$

d) Deoarece $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ rezultă că punctele sunt coliniare

e) Distanța cerută este $\frac{|4+3-3|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

f) $(\sqrt{3} + i)^4 = a + bi \Leftrightarrow (3 - 1 + 2i\sqrt{3})^2 = a + bi \Leftrightarrow (2 + 2i\sqrt{2})^2 = a + bi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 - 12 + 8i\sqrt{3} = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 8\sqrt{3} \end{cases}$

Subiectul II

1.

a) Ridicând la patrat și desfășurând parantezele se obține egalitatea

b) Dacă $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$, folosind a) obțin că

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0 \Leftrightarrow x-y=0, y-z=0, z-x=0 \text{ adică } x=y=z$$

c) Notând $2^x = a, 3^x = b, 5^x = c$ obțin $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ și aplicând b) rezultă $a=b=c$ adică $x=0$

d) $Z_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$ și cum toate verifică $\hat{x}^3 = \hat{x}$ rezultă că probabilitatea cerută este 1

e) Suma cerută este -1

2.

a) $f'(x) = \sin x + x \cos x, \forall x \in R$

b) $\int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0) = \sin 1$

c) Deoarece $[0,1] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin x \geq 0, \cos x > 0, \forall x \in (0,1] \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in (0,1]$

decif este strict crescătoare pe $(0,1]$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Subiectul III

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + dh \end{pmatrix}$

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

b) Folosind a) am $ae+bg+cf+dh=ea+fc+gb+dh$

c) $A + B = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}; A - B = \begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix}$

d) $\det(A+B)+\det(A-B)=(a+e)(d+h)-(b+f)(c+g)+(a-e)(d-h)-(b-f)(c-g)=$
 $=ad+ah+de+eh-bc-bg-cf-fg+ad-ah-de+he-bc+bg+cf-fg=2(ad-bc)+2(eh-fg)=$
 $=2(\det A+\det B)$

e) $\det A \cdot \det B = (ad-bc)(eh-fg) = adeh-adfg-bceh+bcfg$
 $\det(AB) = (ae+bg)(cf+dh)-(af+bg)(ce+dg) = aecf+aedh+bpcf+bgdf-afce-afdg-bhce-bhdf$
 $=adeh-adfg-bceh+bcfg$

de unde $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

f) Pentru $n=2$ aplicăm e);

Presupun că $\det(A_1 \dots A_n) = (\det A_1)(\det A_2) \dots (\det A_n)$ și am $\det(A_1 A_2 \dots A_n A_{n+1}) =$
 $\det((A_1 A_2 \dots A_n) \cdot A_{n+1}) = \det(A_1 A_2 \dots A_n) \cdot \det A_{n+1} = (\det A_1)(\det A_2) \dots (\det A_n)(\det A_{n+1})$
Conform principiului inducției matematice propoziția este adevărată pentru orice

$n \in N, n \geq 2$

g) Luând în f) $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ obțin $\det A^n = (\det A)^n$

Subiectul IV

a) $f(1)=7$

b) $(x-1)f(x) = (x-1)(x^6 + x^5 + \dots + x + 1) = x^7 - 1, \forall x \in R$

c) $f(1)=7>0$ și pentru $\forall x \neq 1$ am $f(x) = \frac{x^7 - 1}{x - 1} > 0$

Deci $f(x) > 0, \forall x \in R$

d) $\left(\int_0^x f(t) dt \right)' = f(x) \Rightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in R$

e) $F'(x) = f(x), \forall x \in R$ și $f(x) > 0 \Rightarrow F$ este strict crescătoare pe R

f) Deoarece F este strict crescătoare pe $R \Rightarrow F$ este injectivă deci ecuația

$F(x) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{7}$ are cel mult o soluție și cum $x=1$ convine, aceasta este unica

soluție

g) Notez $u(x) = F(x) - xf(x), \forall x > 0 \Rightarrow u'(x) = F'(x) - f(x) - xf'(x) = -xf'(x) =$

$-x(1 + 2x + \dots + 6x^5) < 0, \forall x > 0 \Rightarrow u$ este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$ cum

$u(0)=0 \Rightarrow u(x) < 0, \forall x > 0$ adică $F(x) \leq xf(x), \forall x > 0$