

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D/F
Varianta053

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru efectiv 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic cu catetele de lungimi 6 și 8.
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului determinat de punctele $A(3, 3)$ și $C(4, 4)$.
- (4p) c) Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3}$.
- (4p) d) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(3, 3)$ și $C(4, 4)$ să aparțină dreptei de ecuație $x + ay + b = 0$.
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului determinat de punctele $A(3, 3)$, $B(3, 2)$ și $C(4, 4)$.
- (2p) f) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să aibă loc egalitatea de numere complexe
- $$\frac{2+i}{i-2} = a+bi.$$

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se calculeze suma soluțiilor reale ale ecuației $x^2 + 4x - 10 = 0$.
- (3p) b) Să se calculeze $\frac{C_5^2}{C_5^3}$.
- (3p) c) Să se rezolve în multimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_5(x+1) = \log_5(x^2 + x)$.
- (3p) d) Să se rezolve, în multimea numerelor reale, ecuația $10^x = 100$.
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $n! \geq 20$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x) dx$.

- (3p) c) Să se arate că $f(x) \geq f(0)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

- (3p) d) Să se determine coordonatele punctului de extrem local al funcției f .

- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f'(x)$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$. Se notează cu F mulțimea funcțiilor $f : \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbf{R}$ crescătoare, care verifică $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.

- (4p) a) Să se arate că dacă $x, y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$, atunci $x + y \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.
- (4p) b) Să se arate că dacă $g : \mathbf{Z}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = tx$, cu $t \in [0, \infty)$ atunci $g \in F$.
- (4p) c) Să se arate că dacă $f \in F$, atunci $f(0) = 0$.
- (2p) d) Să se arate că dacă $f \in F$, atunci $f(n) = n \cdot f(1)$, $\forall n \in \mathbf{N}$.
- (2p) e) Să se arate că dacă $f \in F$ și $a, b \in \mathbf{Z}$, atunci $f(a + b\sqrt{2}) = af(1) + bf(\sqrt{2})$.
- (2p) f) Să se arate că dacă $f(1) = t \in \mathbf{R}$ și $f \in F$, atunci $t \geq 0$.
- (2p) g) Să se arate că dacă $f \in F$ și $f(\sqrt{2}) = 0$, atunci $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_0(x) = e^{2x}$ și $f_{n+1}(x) = f'_n(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f_1(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f_0 .
- (4p) c) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_n(x) = 2^n e^{2x}$,
 $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) d) Să se calculeze $f_0(0) + f_1(0) + \dots + f_n(0)$, $n \in \mathbf{N}$.
- (2p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)}{f_{n+1}(x)}$, $x \in \mathbf{R}$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f_n(t) dt}{f_n(x)}$, $n \in \mathbf{N}$.
- (2p) g) Să se rezolve în \mathbf{R} ecuația $f_0(x) + f_1(x) = 3$.

Varianta 053

Subiectul I

a) Aplicând teorema lui Pitagora obțin că lungimea ipotenuzei este $\sqrt{36 + 64} = 10$

b) $AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

c) $\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$

d) Obțin sistemul $\begin{cases} 3 + 3a + b = 0 \\ 4 + 4a + b = 0 \end{cases}$ cu soluția $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$

e) Aria $[ABC] = \frac{|\Delta|}{2}$ unde $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1$; deci Aria $[ABC] = \frac{1}{2}$.

f) $a + bi = \frac{2+i}{i-2} \Leftrightarrow a + bi = \frac{(2+i)(-2-i)}{5} \Leftrightarrow \frac{-4 - 2i - 2i - i^2}{5} = a + bi \Leftrightarrow a + bi = \frac{-3}{5} - \frac{4}{5}i \Leftrightarrow a = -\frac{3}{5} \text{ și } b = -\frac{4}{5}$.

Subiectul II

1.

a) Suma este -4

b) $\frac{C_5^2}{C_5^3} = \frac{C_5^2}{C_5^2} = 1$

c) Cu $x > 0$, ecuația este echivalentă cu $x+1 = x^2 + x$ deci $x = \pm 1$ și convine numai $x = 1$.

d) $10^x = 100 \Leftrightarrow 10^x = 10^2 \Leftrightarrow x = 2$

e) Numai 4 și 5 verifică inegalitatea, deci probabilitatea cerută este $\frac{2}{5}$.

2.

a) $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, (\forall)x \in R$

b) $\int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

c) $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} > 0, (\forall)x > 0$ și $f'(x) < 0, (\forall)x < 0$ rezultă că $x=0$ este punct de minim global pentru f deci $f(x) \geq f(0), (\forall)x \in R$

d) $x = 0 \Rightarrow f(0) = \ln 1 = 0$ deci O(0,0) este punctul de minim global pentru f

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} xf'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2$

Subiectul III

a) Fie $x = a + b\sqrt{2}, y = c + d\sqrt{2}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

$$x + y = (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$$

- b) $g(x+y) = t(x+y) = tx+ty = g(x)+g(y), (\forall)x, y \in Z[\sqrt{2}] \Rightarrow g \in f$
c) Fie $f \in F \Rightarrow f(x+y) = f(x)+f(y), (\forall)x, y \in Z[\sqrt{2}]$; pentru $x=y=0$ obțin
 $f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

- d) Fie $f \in F \Rightarrow f(x+y) = f(x)+f(y), (\forall)x, y \in Z[\sqrt{2}]$
 $f(2)=f(1)+f(1)=2f(1);$

Presupun $f(n)=nf(1)$ și am $f(n+1)=f(n)+f(1)=nf(1)+f(1)=(n+1)f(1)$
Conform principiului inducției matematice $f(n)=nf(1), (\forall)n \in N$

- e) Fie $f \in F$ și $a, b \in Z$; $f(a_1) = f(a_1)$ și
 $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2), (\forall)a_1, a_2 \in Z[\sqrt{2}];$

Presupun $f(a_1 + \dots + a_n) = f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)$ și am
 $f(a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}) = f(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + f(a_{n+1}) = f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) + f(a_{n+1})$
Conform principiului inducției matematice

$$f(a_1 + \dots + a_n) = f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n), (\forall)a_1, \dots, a_n \in Z[\sqrt{2}] \text{ și } \forall n \in N^*.$$

Pentru $x = a_1 = a_2 = \dots = a_n$ obțin $f(nx) = nf(x), \forall n \in N^*$ și $(\forall)x \in Z[\sqrt{2}]$ și

$$f(kx) = kf(x), \forall x \in Z[\sqrt{2}] \text{ și } \forall k \in Z$$

$$\text{Atunci } f(a+b\sqrt{2}) = f(a) + f(b\sqrt{2}) = af(1) + bf(\sqrt{2}), \forall a, b \in Z$$

- f) f crescătoare $\Rightarrow f(1) \geq f(0) = 0$

- g) Fie $f \in F$ și $f(\sqrt{2}) = 0$ și $x = a + b\sqrt{2} \in Z[\sqrt{2}]$; Conform e) am
 $f(x) = f(a + b\sqrt{2}) = af(1) + bf(\sqrt{2}) = af(1), \forall x \in Z[\sqrt{2}]$

Aleg $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ și deci $f(x) = 0, \forall x \in Z[\sqrt{2}]$

Subiectul IV

a) $f_1(x) = f'_0(x) = (e^{2x})' = 2e^{2x}, \forall x \in R$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală către $-\infty$.

c) Pentru $n=0$ am $f_0(x) = 2^0 \cdot e^{2x} = e^{2x}$ da;

Presupun $f_n(x) = 2^n e^{2x}$ și am $f_{n+1}(x) = f'_n(x) = (2^n e^{2x})' = 2^{n+1} e^{2x}, \forall x \in R$.

Conform principiului inducției matematice $f_n(x) = 2^n e^{2x}, \forall x \in R, \forall n \in N$

d) $\sum_{k=0}^n f_k(0) = \sum_{k=0}^n 2^k e^0 = \sum_{k=0}^n 2^k = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f_n(t) dt}{f_n(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f'_{n-1}(t) dt}{f_n(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{n-1}(x) - f_{n-1}(0)}{f_n(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1} e^{2x} - 2^{n-1}}{2^n e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{2^{n-1}}{2^n e^{2x}} \right] = \frac{1}{2}$

g) $f_0(x) + f_1(x) = 3 \Leftrightarrow e^{2x} + 2e^{2x} = 3 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} = e^0 \Leftrightarrow x = 0$