

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
**Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D**
Varianta051

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine numerele reale a și b dacă dreptele $d_1 : y = ax + b$ și $d_2 : y = bx - a$ trec prin punctul $A(1,1)$.
- (4p) b) Să se calculeze perimetrul unui triunghi echilateral dacă aria sa este egală cu 3.
- (4p) c) Să se dea exemplu de un număr complex nereal care are modulul egal cu 3.
- (4p) d) Să se găsească un număr natural n pentru care $i^n + i^{n+1} = 1 - i$, unde $i^2 = -1$.
- (2p) e) Să se dea un exemplu de două numere reale x și y pentru care $\cos(x + y) = 0$.
- (2p) f) Să se găsească două elemente ale mulțimii $M = \{x \in \mathbf{R} \mid \sin x = \sin 2x\}$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se demonstreze egalitatea $C_{x+1}^{y+1} = \frac{x+1}{y+1} C_x^y$, $\forall x, y \in \mathbf{N}^*$, $x \geq y$.
- (3p) b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_8$ să verifice relația $\hat{x}^2 = \hat{1}$.
- (3p) c) Dacă funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 10$, are inversă $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, să se calculeze $g(11)$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x = 8^x$.
- (3p) e) Să se calculeze produsul rădăcinilor polinomului $f = X^3 - X^2 - 2X + 1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^8 + 1$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.
- (3p) c) Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbf{R} .
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 (e^x + \sin x)dx$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{C})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea

$$G = \{X \in M_2(\mathbf{C}) \mid AX = XA\}.$$

- (4p) a) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A .
- (4p) b) Să se verifice că $I_2 \in G$ și $A \in G$.
- (4p) c) Să se calculeze matricea A^2 .
- (2p) d) Să se arate că $XA^2 = A^2X$, $\forall X \in M_2(\mathbf{C})$.
- (2p) e) Să se găsească o matrice $B \in M_2(\mathbf{C})$ cu proprietatea că $AB \neq BA$.
- (2p) f) Să se arate că, dacă $a, b \in \mathbf{C}$, atunci $aI_2 + bA \in G$.
- (2p) g) Să se arate că, dacă $X \in G$, atunci există $x, y \in \mathbf{C}$ astfel încât $X = xI_2 + yA$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_n(x) = e^x(x^2 + 2nx + n(n-1))$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'_1(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se verifice că $f_n'(x) = f_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se calculeze $f_n(0)$.
- (2p) d) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq 2.$$
- (2p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_1(0) + f_2(0) + \dots + f_n(0)}{n^3}$.
- (2p) f) Să se calculeze $\int_0^1 f_0(x) dx$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$.

Varianta 051

SUBIECTUL I

- a) $a = 0, b = 1$. b) $6\sqrt[4]{3}$. c) $z = 3i$.
 d) Relația devine: $i^n(1+i) = 1 - i \Rightarrow i^n = -i \Rightarrow n = 3$. (de exemplu !)

e) $x = \frac{\pi}{6}, y = \frac{\pi}{3}$. f) $x \in \{0, \pi\}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $C_{x+1}^{y+1} = \frac{(x+1)!}{(y+1)!(x+1-y-1)!} = \frac{x!(x+1)}{y!(y+1)(x-y)!} = \frac{x+1}{y+1} \cdot C_x^y$.

b) $\frac{4}{9}$. c) $g(11) = 1$, pentru că $f(1) = 11$.

d) $2^{2x} = 2^{3x} \Rightarrow x = 0$

e) Folosind relațiile lui Vieta, obținem $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -1$.

2.

a) $f'(x) = 8x^7$. b) $\frac{10}{9}$. c) $f''(x) = 56x^6 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, deci funcția este convexă.

d) 8. e) $e - \cos 1$.

SUBIECTUL III

a) $\det(A) = 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 1$.

b) $I_2 \cdot A = A \cdot I_2 \Rightarrow I_2 \in G$. Deoarece $A^2 = A \cdot A$, avem că $A \in G$.

c) $A^2 = O_2$. d) $X \cdot A^2 = O_2 = A^2 \cdot X, \forall X \in M_2(\mathbb{C})$.

e) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ și $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

f) Pe de o parte avem $(a \cdot I_2 + b \cdot A) \cdot A = aA + bA^2 = aA$. Pe de altă parte

$A \cdot (a \cdot I_2 + b \cdot A) = aA + bA^2 = aA$. Atunci $aI_2 + bA \in G$.

g) $X \in G \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}$. Din

$$X = x \cdot I_2 + y \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & y \\ -y & x-y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ x-y=c \\ b=y \end{cases} \Rightarrow x = \frac{a-c}{2}, y = b$$

SUBIECTUL IV

a) $f_1'(x) = \left[e^x (x^2 + 2x) \right]' = e^x (x^2 + 4x + 2)$.

b) $f_{n+1}(x) = e^x (x^2 + 2(n+1)x + n(n+1))$ și

$$f_n'(x) = e^x (x^2 + 2nx + n(n-1)) + e^x (2x + 2n) = e^x (x^2 + 2(n+1)x + n(n+1)).$$

c) $f_n(0) = n(n-1)$.

d) Pentru $n = 2$ avem egalitatea $1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$. Presupunem că

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (k-1) \cdot k = \frac{(k-1) \cdot k \cdot (k+1)}{3}, \text{ și demonstrăm că}$$

$$P(k+1): 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (k+1) \cdot k = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)}{3}.$$

e) $\frac{1}{3}$. f) $\int_0^1 f_0(x) dx = \int_0^1 e^x \cdot x^2 dx = e - 2$.

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x \cdot (x^2 + 2(n+1)x + (n+1)n)}{e^x \cdot (x^2 + 2nx + n(n-1))} = 1$.