

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta050

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian de coordinate xOy se consideră punctele $A_n(n,1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $O(0,0)$.

- (4p) a) Să se determine panta dreptei OA_1 .
- (4p) b) Să se arate că punctele A_0 și A_1 aparțin dreptei de ecuație $y = 1$.
- (4p) c) Să se calculeze aria triunghiului OA_0A_1 .
- (4p) d) Să se calculeze lungimea segmentului $[OA_n]$, $n \in \mathbb{N}$.
- (2p) e) Să se determine numărul dreptelor determinate de punctele mulțimii $\{O, A_0, A_1, \dots, A_{10}\}$.
- (2p) f) Să se determine numărul triunghiurilor care au vârfurile în câte 3 puncte din mulțimea $\{O, A_0, A_1, \dots, A_{10}\}$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$.
- (3p) b) Să se calculeze numărul de mulțimi X care verifică relația $X \cup \{1,2\} = \{1,2,3,4,5,6\}$.
- (3p) c) Să se calculeze matricea $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{2007}$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor raționale ecuația $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element n din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$, să verifice relația $n^2 - 2n \geq 0$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{1}{f^2(x)} dx$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- (3p) d) Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $G = \{f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \mid f(x) = ax + 1 - a, a \in \mathbf{R}^*\}$ și funcția

$$1_{\mathbf{R}} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, 1_{\mathbf{R}}(x) = x, \forall x \in \mathbf{R}.$$

- (4p) a) Să se arate că dacă $f, g \in G$, atunci $f \circ g \in G$.
- (4p) b) Să se arate că $1_{\mathbf{R}} \in G$.
- (4p) c) Să se arate că $f \circ 1_{\mathbf{R}} = 1_{\mathbf{R}} \circ f = f$, $\forall f \in G$.
- (2p) d) Să se arate că dacă $f \in G$, $f(x) = ax + 1 - a$ și $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{x-1+a}{a}$, atunci $g \in G$ și $f \circ g = g \circ f = 1_{\mathbf{R}}$.
- (2p) e) Să se calculeze $1_{\mathbf{R}}(1) + 1_{\mathbf{R}}(2) + \dots + 1_{\mathbf{R}}(100)$.
- (2p) f) Să se calculeze $h \circ h \circ h$, unde $h \in G$, $h(x) = 2x - 1$.
- (2p) g) Să se arate că mulțimea G , împreună cu operația de compunere a funcțiilor, formează o structură de grup comutativ.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^3}$ și se definește sirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$,

$$a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n), \quad \forall n \in \mathbf{N}^*.$$

- (4p) a) Să se calculeze $\int f(x)dx$, $x \in (0, \infty)$.
- (4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- (4p) c) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.
- (2p) d) Să se arate că sirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este strict crescător.
- (2p) e) Să se arate că $\frac{1}{(k+1)^3} < \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{2(k+1)^2}$, $\forall k > 0$.
- (2p) f) Să se arate că $1,15 \leq a_n$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 4$.
- (2p) g) Să se arate că $a_n \leq 1,21$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Varianta 050

SUBIECTUL I

a) $m_{OA} = \frac{1-0}{1-0} = 1$. b) $A_0A_1 : y - 1 = 0$. c) $\frac{1}{2}$. d) $\sqrt{n^2 + 1}$. e) 12 drepte.

f) $10 + 9 + \dots + 1 = 55$ de triunghiuri.

SUBIECTUL II

1.

a) -8 . b) Patru multimi.

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = O_2$ și deci $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{2007} = O_2$. d) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$. e) $\frac{4}{5}$.

2.

a) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbf{R}$. b) $\frac{\pi}{4}$. c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0$.

d) $y = x$ este ecuația asimptotei oblice către $+\infty$. e) -1 .

SUBIECTUL III

a) Din $f, g \in G$ obținem $f(x) = ax + 1 - a, a \in \mathbf{R}^*$ și $g(x) = bx + 1 - b, b \in \mathbf{R}^*$.

Prin calcul obținem $(f \circ g)(x) = abx + 1 - ab = f_{ab} \in G$.

b) $1_R(x) = x = 1 \cdot x + 1 - 1 \in G$, pentru $a = 1$.

c) $(f \circ 1_R)(x) = f(x)$ și $(1_R \circ f)(x) = f(x)$. Deci $f \circ 1_R = 1_R \circ f = f$.

d) $(f \circ g)(x) = x = 1_R(x)$ și $(g \circ f)(x) = x = 1_R(x)$. Deci $f \circ g = g \circ f = 1_R$.

e) $1_R(1) + 1_R(2) + \dots + 1_R(100) = 1 + 2 + \dots + 100 = 5050$.

f) funcția cerută este f_8 (Sau calcul efectiv).

g) $\forall f_a, f_b, f_c \in G$ avem: $(f_a \circ f_b) \circ f_c = f_{ab} \circ f_c = f_{abc} = f_a \circ (f_b \circ f_c)$, deci legea este asociativă. Legea de compunere a funcțiilor este comutativă deoarece

$f_a \circ f_b = f_b \circ f_a$. Din c) obținem că $\exists 1_R \in G$ astfel încât $1_R \circ f_a = f_a \circ 1_R = f_a$,

$\forall f_a \in G$. Din d) obținem că $\forall f_a \in G$ $\exists f_{a'} = f_{\frac{1}{a}} = g \in G$ astfel încât

$f_a \circ f_{a'} = 1_R$. Din toate acestea rezultă că (G, \circ) este grup abelian.

SUBIECTUL IV

a) $\int f(x)dx = -\frac{1}{2x^2} + C, \forall x \in (0, \infty)$. b) $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$.

c) $f'(x) < 0, \forall x \in (0, \infty)$ rezultă că funcția f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

d) $a_{n+1} - a_n = f(n+1) = \frac{1}{(n+1)^3} > 0$, deci $(a_n)_{n \geq 1}$ este un sir strict crescător.

e) Din $\frac{1}{(k+1)^3} < \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{2(k+1)^2}$ se obține echivalent $0 < 3k + 1, k > 0$, care este o inegalitate evidentă.

f) Pentru $n \geq 4$ avem $a_n \geq a_4 = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} \geq 1 + 0,12 + 0,3 = 1,15$.

g) Se demonstrează ușor că sirul $(b_n)_{n>0}$, $b_n = a_n + \frac{1}{2n^2}$ este descrescător și că $a_n < b_n < b_{n-1} < \dots < b_3 = a_3 + \frac{1}{2 \cdot 3^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{18} < 1,21$.