

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta049

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete
SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât $x + ay + b = 0$ să reprezinte ecuația dreptei care conține punctele $A(5,1)$ și $C(1,5)$.
- (4p) b) Să se calculeze lungimea segmentului cu extremitățile în punctele $A(5,1)$ și $C(1,5)$.
- (4p) c) Să se calculeze modulul numărului complex $1 + i$.
- (4p) d) Să se calculeze $\sin \pi + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.
- (2p) e) Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(5,6)$, $B(2,2)$ și $C(6,5)$.
- (2p) f) Să se calculeze suma de numere complexe $1 + i + i^2 + \dots + i^{11}$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se calculeze suma elementelor în grupul $(\mathbf{Z}_{14}, +)$.
- (3p) b) Să se calculeze numărul de mulțimi $X \subseteq \{1,2,3,4,5,6\}$ care verifică relația $X \cap \{1,2,3,4\} = \{1,2\}$.
- (3p) c) Să se calculeze numărul de funcții care se pot defini pe mulțimea $\{1,2\}$ cu valori în mulțimea $\{a,b\}$.
- (3p) d) Să se rezolve în mulțimea numerelor raționale ecuația $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$.
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element n din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$, să verifice relația $n^2 + 5n - 6 \geq 0$.

 2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^5 - 5x^3$.

- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- (3p) c) Să se calculeze numărul punctelor de extrem local ale funcției f .
- (3p) d) Să se calculeze numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției f .
- (3p) e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt[n]{n+4}}{5\sqrt[n]{n+6}}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea M formată din toate matricele cu 3 linii și 3 coloane și care au toate elementele egale cu 1 sau cu -1 .

- (4p) a) Să se verifice că, dacă $A \in M$, atunci $-A \in M$.
- (4p) b) Să se determine numărul elementelor mulțimii M .
- (4p) c) Să se arate că, dacă $A \in M$, atunci determinantul matricei A se divide cu 4.
- (2p) d) Să se arate că, dacă $A \in M$, atunci $\det(A) \in \{-4, 0, 4\}$.
- (2p) e) Să se arate că, dacă $B \in M$ este o matrice inversabilă, atunci $B^{-1} \notin M$.
- (2p) f) Să se găsească o matrice $C \in M$, pentru care $\det(C) = 4$.
- (2p) g) Să se arate că, dacă $A \in M$, atunci matricea A^{2007} are toate elementele nenule.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definite prin $f_0(x) = 1$ și $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$,

$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}$.

- (4p) a) Să se verifice că $f_1(x) = x, \forall x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se calculeze $f_2(x), x \in \mathbf{R}$.
- (4p) c) Să se rezolve în \mathbf{R} ecuația $f_1(x) + f_2(x) = 0$.
- (2p) d) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1)$.
- (2p) e) Să se arate că $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbf{R}$.
- (2p) f) Să se arate că $f'_{n+1}(x) = f_n(x), \forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}$.
- (2p) g) Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) = 0.$$

VARIANTA 049
SUBIECTUL I

a) Se obține sistemul $\begin{cases} 5+a+b=0 \\ 1+5a+b=0 \end{cases}$ cu soluția $\begin{cases} a=4 \\ b=-9 \end{cases}$;

b) $AC = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$;

c) Dacă $z=1+i$ atunci $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$;

d) $\sin \pi + \tan \frac{\pi}{4} = 1$;

e) Aria $[\text{ABC}] = \frac{|\Delta|}{2}$ unde $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 + 16 = 7$, deci aria $[\text{ABC}] = \frac{7}{2}$;

f) Se știe că $i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ i, & n = 4k + 1 \\ -1, & n = 4k + 2 \\ -i, & n = 4k + 3 \end{cases}$, deci $1+i+i^2+\dots+i^{11} = (1+i+i^2+i^3)+(i^4+i^5+i^6+i^7)+(i^8+i^9+i^{10}+i^{11}) = 0+0+0=0$

SUBIECT II

1.

a) $Z_{14} = \left\{ \hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{13} \right\}$ deci suma cerută este $\sum_{k=0}^{13} \hat{k} = \hat{7} + \sum_{k=1}^6 (\hat{7} + \hat{0}) = \hat{7}$;

b) Fie $X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ astfel încât $X \cap \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2\}$; atunci $\{3, 4\} \notin X$, iar $\{1, 2\} \in X$ deci $X = \{1, 2\}$ sau $X = \{1, 2, 5\}$ sau $X = \{1, 2, 6\}$ sau $X = \{1, 2, 5, 6\}$

c) Numărul de funcții este $2^2 = 4$;

d) Notez $f = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \in Z[X]$; dacă $\alpha \in Q$, $\alpha = \frac{m}{n}$, $m, n \in Z$, $(m, n) = 1$, $n \neq 1$ este rădăcină a lui f atunci n divide 1 și m divide 6 adică $\alpha \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$; evident $\alpha > 0$ nu convine, iar dintre valorile negative $f(-1) = 0$, $f(-2) = 0$, $f(-3) = 0$. Concluzie soluțiile raționale ale ecuației sunt -1, -2, -3.

e) $n^2 + 5n - 6 \geq 0 \Leftrightarrow (n-1)(n+6) \geq 0$ și cum $n > 0$ obțin $n \geq 1$, adică toate numerele din $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ verifică inegalitatea; deci probabilitatea cerută este 1

2.

a) $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 = 5x^2(x^2 - 3)$, $\forall x \in R$

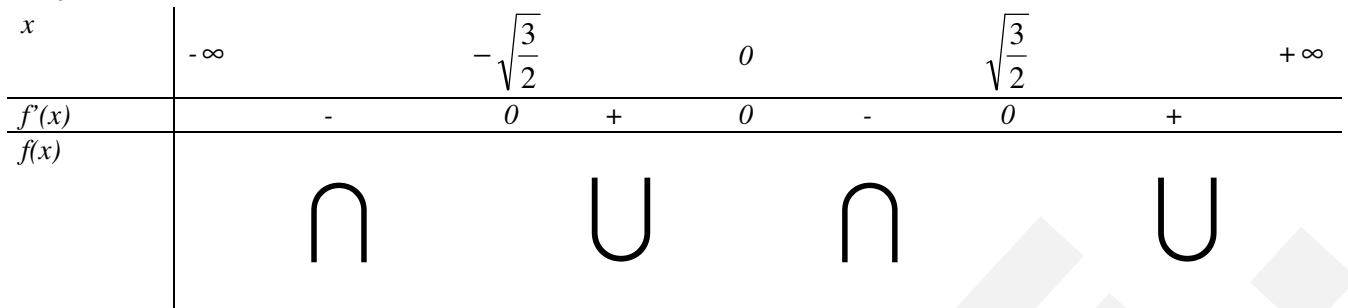
b) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^5 - 5x^3) dx = \left(\frac{x^6}{6} - \frac{5x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{5}{4} = -\frac{13}{12}$;

c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x = -\sqrt{3}$ sau $x = \sqrt{3}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

Din tabel se vede că f are două puncte de extreime locale $x_1 = -\sqrt{3}$ și $x_2 = \sqrt{3}$;

d) $f''(x) = 20x^3 - 30x = 10x(2x^2 - 3)$



Din tabel se vede că f are trei puncte de inflexiune $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{n} + 4}{5\sqrt{n} + 6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \left[3 + \frac{4}{\sqrt{n}} \right]}{\sqrt{n} \left[5 + \frac{6}{\sqrt{n}} \right]} = \frac{3}{5}$.

SUBIECTUL III

- a) Fie $A = (a_{ij})_{i,j=1,3}$, $a_{ij} \in \{\pm 1\} \Rightarrow -A = (-a_{ij})_{i,j=1,3} \in M$ căci $-a_{ij} \in \{\pm 1\}$;
- b) Fie $A \in M$; deoarece A are 9 elemente impare și fiecare poate fi ales în două moduri, rezultă că în M sunt 2^9 matrice;
- c) Fie $A \in M$; adunând linia 1 la liniile 2 și 3, acestea vor avea elemente din multimea $\{0, 2, -2\}$. În $\det A$ scoatem factor comun 2 de pe linia 2 și linia 3 și $\det A$ se divide cu 4 (căci determinantul rămas are numai elemente întregi, deci este întreg);
- d) Fie $A \in M$; cum $\det A$ este o sumă de șase termeni fiecare din multimea $\{-1, 1\}$, atunci $-6 \leq \det A \leq 6$. Dar la c) am demonstrat că 4 divide $\det A$. Deci $\det A \in \{-4, 0, 4\}$;
- e) Fie $B \in M$ inversabilă; presupun că $B^{-1} \in M$ adică elementele sale sunt 1 sau -1. Deoarece elementele matricei B sunt, de asemenea 1 sau -1 ar rezulta că $B \cdot B^{-1}$ are toate elementele impare (ca sumă de trei impare) ceea ce este fals căci $B \cdot B^{-1} = I_3$ și I_3 are ca element pe 0;

f) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M$ și $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 4$

- g) Fie $A \in M$, arbitrară; atunci A^2 are numai elemente impare și prin inducție A^{2007} va avea numai elemente impare, adică toate elementele lui A^{2007} sunt nenule.

SUBIECTUL IV

a) $f_1(x) = \int_0^x f_0(t) dt = \int_0^x dt \Rightarrow \boxed{x} = x, (\forall)x \in R$;

b) $f_2(x) = \int_0^x f_1(t) dt = \int_0^x t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^x = \frac{x^2}{2}, (\forall)x \in R$

c) Ecuația $f_1(x) + f_2(x) = 0$ devine: $\frac{x^2}{2} + x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x = -2$

d) Voi arăta prin inducție că $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}, (\forall)x \in R, (\forall)n \in N$

Pentru $n=0$ $f_0(x) = \frac{x^0}{0!} = 1$, da.

Presupun că $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ și am f $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt = \int_0^x \frac{t^n}{n!} dt = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \Big|_0^x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$;

Conform principiului inducției matematice $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}, (\forall)x \in R, (\forall)n \in N$;

$$e) f_n(1) = \frac{1}{n!} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$$

$$f) f_{n+1}'(x) = \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right)' = \frac{(n+1)x^n}{n!(n+1)} = \frac{x^n}{n!} = f_n(x), (\forall)x \in R, (\forall)n \in N$$

$$g) f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} = 0 \Leftrightarrow x \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} \right) = 0$$

Notez $h(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}, h : R \rightarrow R$

$$h'(x) = \frac{x^2}{8} + \frac{x}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{24}(3x^2 + 8x + 12) \quad \Delta_x = 64 - 144 < 0 \Rightarrow h'(x) > 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$h'(x)$	+	+
$h(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Ținând cont de table și de faptul că h este continuă, rezultă că există și este unic $c \in R$ cu $h(c) = 0$ adică ecuația $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) = 0$ are două soluții reale: $x_1 = 0$; $x_2 = c$ și două soluții complexe nereale.