

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D**
***Varianta ...048***

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările  
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

În sistemul cartezian de coordonate  $xOy$  se consideră punctele  $A(2, 1)$ ,  $B(6, 4)$  și  $C(5, -3)$ .

- (4p) a) Să se calculeze lungimile segmentelor  $[AB]$  și  $[AC]$ .  
 (4p) b) Să se calculeze  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .  
 (4p) c) Să se calculeze  $m(\hat{A})$ .  
 (4p) d) Să se determine coordonatele simetricului punctului  $C$  față de punctul  $B$ .  
 (4p) e) Folosind eventual egalitatea  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$ , să se calculeze  $\sin 15^\circ$ .  
 (2p) f) Să se calculeze modulul numărului complex  $z = \frac{3-4i}{-4+3i}$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**

1.

- (3p) a) Să se arate că numărul  $\lg 1000$  este natural.  
 (3p) b) Sirul  $a_1, a_2, 12, 17, a_5, a_6, \dots$  este o progresie aritmetică.  
 Să se determine termenul  $a_1$ .  
 (3p) c) Să se demonstreze că  $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$ , pentru orice  $x \in \mathbf{R}$ .  
 (3p) d) Să se determine coeficientul lui  $x^3$  din dezvoltarea  $(2+x)^4$ .  
 (3p) e) Să se determine restul împărțirii polinomului  $f = X^4 + X^2 + 1$  la polinomul  $g = X^2 - X + 1$ .

2. Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x) + \frac{1}{x^2}$ , pentru  $x > 0$ .  
 (3p) b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .  
 (3p) c) Să se calculeze  $\int_1^2 f''(x) dx$ .  
 (3p) d) Să se determine  $\alpha \in \mathbf{R}$  astfel încât punctul  $A(2, \alpha)$  să aparțină graficului funcției  $f$ .  
 (3p) e) Să se arate că  $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ ,  $\forall x > 0$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

În mulțimea  $M_2(\mathbf{Z}_3)$  se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$

$$I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \text{ și mulțimea } G = \{X \in M_2(\mathbf{Z}_3) \mid X^2 = I_2\}.$$

- (4p) a) Să se verifice că  $I_2 \in G$ .
- (4p) b) Să se arate că  $A \in G$  și  $B \in G$ .
- (4p) c) Să se arate că  $AB \neq BA$ .
- (2p) d) Să se găsească o matrice  $X \in M_2(\mathbf{Z}_3)$  astfel încât  $A \cdot X = I_2$ .
- (2p) e) Să se arate că  $AB \notin G$ .
- (2p) f) Să se determine cel mai mic număr natural nenul  $n$ , cu proprietatea că  $(AB)^n = I_2$ .
- (2p) g) Să se arate că mulțimea  $G$  are cel puțin 6 elemente.

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ .

- (4p) a) Să se determine asimptota verticală la graficul funcției  $f$ .
- (4p) b) Să se determine asimptota spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- (4p) c) Să se arate că  $f(x) - 1 + x - x^2 \leq 0$ ,  $\forall x \geq 0$ .
- (2p) d) Să se arate că  $f(x) - 1 + x - x^2 + x^3 \geq 0$ ,  $\forall x \geq 0$ .
- (2p) e) Să se deducă inegalitățile  $1 - x + x^2 - x^3 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2$ ,  $\forall x \geq 0$ .
- (2p) f) Să se arate că  $1 - x^9 + x^{18} - x^{27} \leq \frac{1}{1+x^9} \leq 1 - x^9 + x^{18}$ ,  $\forall x \geq 0$ .
- (2p) g) Să se arate că aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției  $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g(x) = \frac{1}{1+x^9}$ , axa  $Ox$  și dreptele  $x = 0$  și  $x = 1$ , este un număr real cuprins în intervalul  $(0,91; 0,96)$ .

## Varianta 048

### SUBIECTUL I

a)  $AB = \sqrt{(6-2)^2 + (4-1)^2} = 5$ ,  $AC = \sqrt{(5-2)^2 + (-3-1)^2} = 5$ .

b)  $\vec{AB} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ ,  $\vec{AC} = 3\vec{i} - 4\vec{j} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \cdot 3 - 3 \cdot 4 = 0$ .

c) Din rezultatul de la punctul b)  $\Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{AC}$ , deci  $m(\hat{A}) = 90^\circ$ .

d) Fie  $D$  simetricul lui  $C$  față de  $B$ , atunci  $B$  este mijlocul segmentului  $[CD]$

$$\Rightarrow x_B = \frac{x_C + x_D}{2} \Leftrightarrow 6 = \frac{5 + x_D}{2} \Rightarrow x_D = 7. \text{ Analog,}$$

$$y_B = \frac{y_C + y_D}{2} \Leftrightarrow 4 = \frac{-3 + y_D}{2} \Rightarrow y_D = 11. \text{ Deci punctul căutat este } D(7, 11).$$

e)  $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ .

f)  $|z| = \frac{\sqrt{9+16}}{\sqrt{16+9}} = 1$

### SUBIECTUL II

1) a)  $\lg 1000 = 3 \in \mathbb{N}$

b)  $a_4 = a_3 + r \Rightarrow 17 = 12 + r \Rightarrow r = 5$ ,  $a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow 12 = a_1 + 10 \Rightarrow a_1 = 2$ .

c) Prin calcul direct.

d) Aplicând formula termenului general al dezvoltării avem  $T_{k+1} = C_4^k 2^{4-k} x^k$ .

Înlocuind pe  $k$  cu 3 rezultă  $T_4 = C_4^3 2x^3$ , deci coeficientul lui  $x^3$  este  $C_4^3 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$ .

e) Conform punctului c) polinomul se poate scrie  $f = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$ , deci polinomul  $f$  este divizibil cu polinomul  $g \Rightarrow$  restul împărțirii este 0.

2)

a)  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) + \frac{1}{x^2} = 1$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 0$ .

c)  $\int_1^2 f''(x) dx = f'(x) \Big|_1^2 = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \Big|_1^2 = \frac{3}{4}$ .

d) Punctul  $A(2, \alpha)$  aparține graficului dacă  $f(2) = \alpha \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{2} = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{5}{2}$ .

e)  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + x = f(x), \forall x > 0$ .

### SUBIECTUL III

a)  $I_2^2 = I_2 \Rightarrow I_2 \in G$ .

b) Se verifică prin calcul direct că  $A^2 = I_2$  și  $B^2 = I_2$ , deci  $A, B \in G$ .

c)  $A \cdot B = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}$ , iar  $B \cdot A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$ . Deci  $AB \neq BA$ .

d) Din punctul b) se observă că  $AA = I_2 \Rightarrow X = A \in M_2(\mathbf{Z}_3)$ .

e)  $(AB)^2 = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix} \neq I_2 \Rightarrow AB \notin G$ .

f)  $(AB)^3 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$ ,  $(AB)^4 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow n = 4$ .

g) Fie  $X \in G \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Z}_3)$  și  $X^2 = I_2$ . Din ecuația

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & d^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + bc = \hat{1} \\ b(a+d) = \hat{0} \\ c(a+d) = \hat{0} \\ d^2 + bc = \hat{1} \end{cases}$$

Deoarece inelul  $\mathbf{Z}_3$  este fără divizori ai lui zero, din ecuația a doua se disting două cazuri:

1) Presupunem  $b = \hat{0}$ , de unde rezultă  $a^2 = d^2 = \hat{1} \Rightarrow a, d \in \{\hat{1}, \hat{2}\}$ . Dacă  $a = d$  avem două soluții, iar dacă  $a \neq d$  avem șase soluții. Deci în acest caz avem deja 8 soluții.

2) Presupunem  $a + d = \hat{0}$  și mai obținem 8 soluții.

Deci, mulțimea are cel puțin 6 elemente.

### SUBIECTUL IV

a)  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty$  și  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty \Rightarrow x = -1$  este asimptota verticală.

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$  este asimptota orizontală către  $+\infty$  la graficul funcției.

c)  $f(x) = 1 + x - x^2 = -\frac{x^3}{x+1} \leq 0, \forall x \geq 0$ .

d)  $f(x) = 1 + x - x^2 + x^3 = \frac{x^4}{x+1} \geq 0, \forall x \geq 0$ .

e) Din punctul c) avem  $f(x) = 1 + x - x^2 \leq 0, \forall x \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq 1 - x + x^2, \forall x \geq 0$ , iar din punctul d) avem

$f(x) - 1 + x - x^2 + x^3 \geq 0, \forall x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 1 - x + x^2 - x^3, \forall x \geq 0$ . Deci

$$1 - x + x^2 - x^3 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2, \forall x \geq 0.$$

f) Substituind pe  $x > 0$  cu  $x^9 > 0$  în dubla inegalitate de la punctul anterior, rezultă cerința problemei.

g) Deoarece funcția  $g$  este o funcție pozitivă pe domeniul de definiție, atunci aria este

$$A = \int_0^1 g(x)dx. \text{ Integrând dubla inegalitate de la punctul f) avem :}$$

$$\int_0^1 (1 - x^9 + x^{18} - x^{27}) dx \leq A \leq \int_0^1 (1 - x^9 + x^{18}) dx.$$

Calculând cele două integrale obținem  $0,91 < A < 0,96$ .