EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta** ….046*

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se determine conjugatul numărului complex $z = 2007i$.

(4p) **b)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile $A(6;0), B(0;8), C(6;8)$.

(4p) **c)** Să se determine lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei unui triunghi dreptunghic având catetele de lungime 6, respectiv 8.

(4p) **d)** Să se calculeze modulul numărului complex $z = \dfrac{3+i}{3-i}$.

(2p) **e)** Să se calculeze $\sin\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{9\pi}{4}$.

(2p) **f)** Să se determine ecuația tangentei în punctul $A(-1;0)$ la hiperbola de ecuație $x^2 - \dfrac{y^2}{2} = 1$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se găsească soluțiile reale ale ecuației $3^{x^2+x} = 9$.

(3p) **b)** Să se afle în câte moduri pot fi alese două persoane dintr-un grup de cinci persoane.

(3p) **c)** Să se arate că numărul $\log_2 3 + \log_2 48 - \log_2 18$ este natural.

(3p) **d)** Să se calculeze restul împărțirii polinomului $f = X^3 + X - 2$ la polinomul $g = X - 1$.

(3p) **e)** Să se calculeze probabilitatea ca un element al mulțimii $\{-3;1;4;6\}$ să fie termen al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termenul general $a_n = 2n - 7$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^{2007} + x$.

(3p) **a)** Să se demonstreze că $f(-x) = -f(x),\ (\forall)x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbf{R}$.

(3p) **c)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

(3p) **d)** Să se demonstreze că f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră submulțimea $M=\left\{A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ x-1 & x\end{pmatrix}\middle|\, x\in(0,\infty)\right\}$ și funcția

$f: M\to(0;+\infty)$, $f(A(x))=x$.

(4p) **a)** Să se arate că $A(x)=A(y)$ dacă și numai dacă $x=y$, $x,y\in(0;+\infty)$.

(4p) **b)** Să se arate că $A(x)\cdot A(y)=A(xy)$, $\forall\, A(x),A(y)\in M$.

(4p) **c)** Să se arate că $A(x)\cdot A(y)=A(y)\cdot A(x)$, $\forall A(x),A(y)\in M$.

(2p) **d)** Să se arate că $\exists\, A(e)\in M$, astfel încât $A(x)\cdot A(e)=A(e)\cdot A(x)=A(x)$, $\forall A(x)\in M$.

(2p) **e)** Să se arate că pentru $\forall A(x)\in M$, $\exists A(x')\in M$ astfel încât

$A(x)\cdot A(x')=A(x')\cdot A(x)=A(e)$.

(2p) **f)** Utilizând metoda inducției matematice , să se arate că

$A^n(x)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ x^n-1 & x^n\end{pmatrix}, n\in\mathbf{N}, n\geq 1$.

(2p) **g)** Să se demonstreze că funcția f este bijectivă și că $f(A(x)\cdot A(y))=f(A(x))\cdot f(A(y))$,

$\forall A(x),A(y)\in M$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcțiile $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ și $g(x)=\ln(1+x^2)$.

(4p) **a)** Să se calculeze $f(0)$ și $g(0)$.

(4p) **b)** Să se arate că $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $\forall x\in\mathbf{R}$ și $g'(x)=2f(x)$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(4p) **c)** Să se determine punctele de extrem local ale funcțiilor f și g.

(2p) **d)** Să se găsească ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f.

(2p) **e)** Să se demonstreze că $f(x)\leq 0$, $\forall x\in(-\infty;0]$ și $g(x)\geq 0$, $\forall x\in(-\infty;0]$.

(2p) **f)** Să se demonstreze că $\dfrac{x}{1+x^2}\leq \ln(1+x^2)$, $\forall x\in(-\infty;0]$.

(2p) **g)** Folosind eventual rezultatul de la punctul anterior, să se demonstreze că

$\int_{-1}^{0}\ln(1+x^2)dx\geq -\dfrac{1}{2}\ln 2$.

Varianta 046

SUBIECTUL I

a) $\bar{z} = -2007i$ **.**

b) $AC = 8$**,** $AB = 10$**,** $BC = 6$**,** deci triunghiul este dreptunghic $\Rightarrow$ aria este

$A = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24$.

c) Considerăm triunghiul ABC dreptunghic în *A*, deci $AC = 6$, $AB = 8$, $BC = 10$. Fie $AD \perp BC$. Atunci $AD = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = 4{,}8$.

d) $|z| = \dfrac{|3+i|}{|3-i|} = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 1$.

e) $\sin\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{9\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4} - \sin\left(2\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{\pi}{4} = 0$.

f) Punctul $A(-1, 0)$ aparține hiperbolei, deci ecuația tangentei se obține prin dedublarea ecuației hiperbolei, adică $x_A x - \dfrac{y_A y}{2} = 1 \Leftrightarrow x = -1$.

SUBIECTUL II

1)

a) $3^{x^2+x} = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$. Soluțiile ecuației sunt $x_1 = 1$ şi $x_2 = -2$.

b) $C_5^2 = 10$.

c) $\log_2 3 + \log_2 48 - \log_2 18 = \log_2 \dfrac{3 \cdot 48}{18} = 3 \in \mathbf{N}$.

d) Aplicând teorema restului obținem $r = f(1) = 0$.

e) $-3 = 2n - 7 \Leftrightarrow n = 2 \in \mathbf{N} \Rightarrow a_2 = -3$ este termen al şirului

$1 = 2n - 7 \Leftrightarrow n = 4 \in \mathbf{N} \Rightarrow a_4 = 1$ este termen al şirului

$4 = 2n - 7 \Leftrightarrow n = \dfrac{11}{2} \notin \mathbf{N} \Rightarrow 4$ nu este termen al şirului

$6 = 2n - 7 \Leftrightarrow n = \dfrac{13}{2} \notin \mathbf{N} \Rightarrow 6$ nu este termen al şirului.

Deci probabilitatea este $\dfrac{2}{4} = 0{,}5$.

2)

a) $f(-x) = (-x)^{2007} - x = -(x^{2007} + x) = -f(x), \forall x \in \mathbf{R}$.

b) $f'(x) = 2007x^{2006} + 1$.

c) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)=1$.

d) $f'(x)>0$, $\forall x\in \mathbf{R} \Rightarrow$ funcția este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

e) $\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$ pentru că funcția este impară (s-a demonstrat la punctul a)).

SUBIECTUL III

a) $A(x)=A(y) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x-1 & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y-1 & y \end{pmatrix} \Leftrightarrow x=y$, $x, y\in (0,\infty)$.

b) $\forall A(x), A(y)\in M$ avem $A(x)A(y)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x-1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y-1 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ xy-1 & xy \end{pmatrix}=A(xy)$.

c) $A(x)A(y)=A(xy)=A(yx)=A(y)A(x)$, $\forall A(x), A(y)\in M$.

d) Datorită comutativității trebuie să rezolvăm doar ecuația $A(x)A(e)=A(x) \Leftrightarrow$ $A(xe)=A(x) \Leftrightarrow xe=x \Leftrightarrow x(e-1)=0$, $\forall x\in (0,\infty)$ $\Rightarrow e=1\in (0,\infty)$. Deci există matricea $A(1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in M$ care îndeplineşte cerința problemei.

e) Datorită comutativității trebuie să rezolvăm doar ecuația $A(x)A(x')=A(1)$ $\Leftrightarrow A(xx')=A(1) \Leftrightarrow$ $xx'=1 \Rightarrow \exists\, x'=\frac{1}{x}\in (0,\infty)$ pentru orice $x\in (0,\infty)$. Deci $\forall A(x)\in M$, $\exists A(x')=A\left(\frac{1}{x}\right)\in M$ care îndeplineşte cerința problemei.

f) Notăm propoziția cu $P(n)$. Verificăm pentru $n=1 \Rightarrow A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x-1 & x \end{pmatrix}$ ceea ce este adevărat . Presupunem că $P(k)$ adevărată, adică $A^k(x)=A(x^k)$ şi demonstrăm că $P(k)\Rightarrow P(k+1)$. Avem $A^{k+1}(x)=A^k(x)A(x)=A(x^k)A(x)=A(x^k x)=A(x^{k+1})$. Deci $P(n)$ este adevărată pentru orice $n\in \mathbf{N}$, $n\geq 1$.

g) Funcția este bijectivă prin construcție, pentru orice element $x\in (0,\infty)$ există o matrice unică $A(x)\in M$ astfel încât $f(A(x))=x$.
$f(A(x)\cdot A(y))=f(A(xy))=xy=f(A(x))\cdot f(A(y))$, $\forall A(x), A(y)\in M$.

SUBIECTUL IV

a) $f(0)=0$ şi $g(0)=0$.

b) $f'(x)=\frac{x'(1+x^2)-x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $\forall x\in \mathbf{R}$

$g'(x)=\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}=\frac{2x}{1+x^2}=2f(x)$, $\forall x\in \mathbf{R}$.

c) Rezolvând ecuația $f'(x)=0$ obținem soluțiile $x_1=-1$ și $x_2=1$.

x	$-\infty$ -1 0 1 ∞
$f'(x)$	- - - - - - - - 0 + + + + + + + + + + + + 0 - - - - - - - - -
$f(x)$	0 $\searrow$ $f(-1)$ $\nearrow$ 0 $\nearrow$ $f(1)$ $\searrow$

Din tabelul de variație se observă că $x=-1$ și $x=1$ sunt puncte de extrem local pentru funcția f.

Rezolvând ecuația $g'(x)=0$ obținem $x=0$.

x	$-\infty$ 0 ∞
$g'(x)$	- - - - - - - - 0 + + + + +
$g(x)$	$\searrow$ $g(0)$ $\nearrow$

Din tabel se observă că $x=0$ este punct de extrem local al funcției g.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ este asimptotă orizontală către $-\infty$ la graficul funcției f.

e) Din c) și d) și din $f(0)=0$ se observă că $f((-\infty,0])=[-\frac{1}{2},0]$, deci $f(x)\le 0$, $\forall\, x\in(-\infty,0]$. Tot din punctual c) rezultă că funcția g este strict descrescătoare pe $(-\infty,0]$ și valoarea minimă este $g(0)=0$ care se atinge în $x=0$ $\Rightarrow g(x)\ge 0, \forall\, x\in(-\infty,0]$.

f) Din e) avem $f(x)\le 0\le g(x)$, $\forall\, x\in(-\infty,0]\Rightarrow \dfrac{x}{1+x^2}\le \ln(1+x^2)$, $\forall\, x\in(-\infty,0]$.

g) Integrând inegalitatea demonstrată la punctul anterior, avem

$$\int_{-1}^{0}\ln(1+x^2)dx \ge \int_{-1}^{0}\frac{x}{1+x^2}dx=-\frac{1}{2}\ln 2.$$