

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ  
PROBA D**
***Varianta ....045***

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**
**SUBIECTUL I ( 20p )**

- (4p) a) Să se calculeze  $\arcsin 1$ .
- (4p) b) Să se determine numărul punctelor de intersecție dintre cercul de ecuație  $x^2 + y^2 = 8$  și dreapta de ecuație  $y = 2$ .
- (4p) c) Să se calculeze partea reală a numărului complex  $z = (2 - i)(2 + i)$ .
- (4p) d) Să se calculeze  $\sin \pi + \sin(-\pi)$ .
- (2p) e) Să se determine  $a \in \mathbf{R}$  astfel încât dreptele  $d_1 : x + ay + 2 = 0$  și  $d_2 : 2x + 4y + 1 = 0$  să fie paralele.
- (2p) f) Să se determine  $a, b \in \mathbf{R}$ , astfel încât să aibă loc egalitatea de numere complexe  $2 + 3i + i(a + bi) = 4i$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**
**1.**

- (3p) a) Să se calculeze  $(f \circ g)(2)$ , unde  $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 3x - 2$ ,  $g(x) = x + 1$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\frac{5! - 3!}{4!}$ .
- (3p) c) Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația  $x^2 + 2x + 2 = 0$ .
- (3p) d) Să se determine restul împărțirii polinomului  $f = X^3 - 5X^2 + 4$  la polinomul  $g = X + 2$ .
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  să verifice relația  $3^n < 25$ .

**2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ .**

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- (3p) c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .
- (3p) d) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare pe intervalul  $[-1, 1]$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot f(x)$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Se consideră mulțimea  $M$  formată din toate matricele cu 2 linii și 2 coloane și care au toate elementele din mulțimea  $\{0,1,2\}$ , iar elementul de pe linia 1 și de pe coloana 1 este diferit de 0.

- (4p) a) Să se verifice că  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$  și  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin M$ .
- (4p) b) Să se găsească o matrice  $A \in M$ , pentru care  $\det(A) = 0$  și o matrice  $B \in M$ , pentru care  $\det(B) \neq 0$ .
- (4p) c) Să se arate că matricea  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$ , este inversabilă, dar  $A^{-1} \notin M$ .
- (2p) d) Să se arate că, dacă  $X \in M$ , atunci  $-4 \leq \det(X) \leq 4$ .
- (2p) e) Să se determine numărul elementelor mulțimii  $M$ .
- (2p) f) Să se arate că, dacă efectuăm produsul tuturor matricelor din mulțimea  $M$  (în orice ordine), vom obține o matrice cu rangul egal cu 1.
- (2p) g) Să se arate că, dacă  $n \in \{-4, -3, -2, \dots, 2, 3, 4\}$ , atunci există o matrice  $Y \in M$ , astfel încât  $\det(Y) = n$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) b) Să se verifice că  $f(-x) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (4p) c) Să se arate că  $0 < f(x) \leq 1$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ .
- (2p) d) Să se determine abscisele punctelor de inflexiune ale graficului funcției  $f$ .
- (2p) e) Să se determine ecuația asimptotei spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- (2p) f) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \int_0^x f(t) dt \right)$ .
- (2p) g) Să se găsească o funcție  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , continuă pe  $\mathbf{R}$ , care verifică  $g(x) > 0$ ,

$$\forall x \in \mathbf{R} \text{ și } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \int_{-x}^x g(t) dt \right) < 10^{-2007}.$$

## VARIANTA 45

### SUBIECTUL I

a.)  $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

b.) Rezolvând sistemul  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, y = 2 \\ sau \\ x = 2, y = 2 \end{cases}$  Obtin 2 puncte de intersectie

c.)  $z = (2-i)(2+i) = 4 - i^2 = 5$ ; Real  $z = 5$

d.)  $\sin \pi + \sin(-\pi) = \sin \pi - \sin \pi = 0$

e.)  $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow -\frac{1}{a} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a=2$

f.)  $2+3i + i(a+bi) = 4i \Leftrightarrow 2-b+i(3+a) = 0+4i \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=1 \end{cases}$

### SUBIECTUL II

1.

a.)  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x)-2 = 3(x+1)-2 = 3x+1 \quad (\forall) x \in R$ .  $(f \circ g)(2) = 7$

b.)  $\frac{5!-3!}{4!} - \frac{3!(20-1)}{3!4} = \frac{19}{4}$

c.)  $\Delta_x = -4 \quad x_1 = -1-i \quad x_2 = -1+i$

d.)  $f(-2) = -8 - 20 + 4 = -24$

e.) Deoarece numai 1 si 2 verifică, obțin probabilitatea  $\frac{2}{5}$

2.

a.)  $f' = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} \quad (\forall) x \in R$

b.)  $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$

c.)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 1$

d.) Evident  $f'(x) > 0 \quad (\forall) x \in (-1,1) \Rightarrow f$  este strict crescătoare pe  $[-1,1]$

e.)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1$

### SUBIECTUL III

a.) Evident

b.) Aleg  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A \in M$  și  $\det A = 0$  și  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B \in M$  și  $\det B = 1 \neq 0$

c.)  $\det A = 2 \neq 0 \Rightarrow (\exists) A^{-1}$  și  $'A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , iar  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin M$   
 Descarcat de pe site-ul ebaallureat.ro

d.) Fie  $X \in M$ ,  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow a, b, c, d \in \{0, 1, 2\}$  cu  $a \neq 0$

$\det X = ad - bc$ ; pentru  $a \cdot d \leq 4$  și  $bc \geq 0$  obțin  $\det X \leq 4$ , apoi  $ad \geq 0$  și  $bc \leq 4$  obțin  $\det X \geq -4$

e.) Fie  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M$ ;  $a_{11}$  poate fi ales în două moduri, pentru fiecare mod elementele  $a_{12}, a_{21}, a_{22}$ , pot fi alese în câte 3 moduri independente unul de celelalte, deci vom avea  $2 \cdot 3^3$  matrice în M.

f.) Fie X matricea obținută, efectuând produsul tuturor matricilor din M; obțin că X are 2 linii și două coloane  $\Rightarrow \text{rang } X \in \{0, 1, 2\}$ . Dar în acest produs, sunt și matrici neinversabile cu determinantul nul, adică  $\det X = 0 \Rightarrow \text{rang } X \in \{0, 1\}$ . Deoarece fiecare element de pe locul 1,1 este nenul rezultă că  $a_{11}$  din X este nenul, deci  $\text{rang } X \neq 0$ . Concluzie:  $\text{rang } X = 1$ .

g.) Pentru  $n=0$  aleg  $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  și  $\det X = 0$ ; pentru  $n=1$  aleg  $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $\det X = 1$ ; pentru  $n = -1$  aleg  $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  și  $\det X = -1$ ; analog pentru  $\pm 2, \pm 3, \pm 4$ .

#### SUBIECTUL IV

a.)  $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} (\forall) x \in R$

b.)  $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} = f(x) (\forall) x \in R$

c.) Evident  $0 \leq f(x) (\forall) x \in R$  și  $\frac{1}{x^2 + 1} \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1 + x^2 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$  adică  $f(x) \leq 1 (\forall) x \in R$

d.)  $f''(x) = \frac{2(3x^2 - 1)}{(1+x^2)^3}$  și cum în jurul punctelor  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  și  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$   $f''$  își schimbă semnul, acestea sunt punctele de inflexiune ale lui  $f$ .

e.)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$  asimptotă orizontală către  $+\infty$

f.)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \int_0^x f(t) dt \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\arctg t) \Big|_0^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$

g.) Fie  $g: R \rightarrow R$   $g(x) = \frac{1}{10^{2008} \cdot \pi} \cdot f(x)$  evident  $g(x) > 0$ ,  $(\forall) x \in R$ , g continuă pe R și în plus g este pară

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \int_{-x}^x g(t) dt \right) = \frac{2}{10^{2008} \cdot \pi} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \int_0^x f(t) dt \right) = \frac{2}{10^{2008} \cdot \pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{10^{2008}} < \frac{1}{10^{2007}}$$