

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianța 044

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

- ◆ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,0)$, $B(4,-3)$ și $C(0,-3)$.

- (4p) a) Să se calculeze lungimea vectorului \overrightarrow{AC} .
- (4p) b) Să se dea un exemplu de dreaptă paralelă cu dreapta AB .
- (4p) c) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC .
- (4p) d) Să se afle coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC .
- (2p) e) Să se determine $\cos(C\hat{A}B)$.
- (2p) f) Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC .

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se afle câte numere cu două cifre distincte se pot forma cu cifrele 3,5,7 și 9.
- (3p) b) Să se determine a_{10} dacă în progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ se cunosc $a_1 = 1$, $a_2 = -1$.
- (3p) c) Să se calculeze $C_9^2 + C_9^7$.
- (3p) d) Să se calculeze $f(1+i)$ dacă $f \in \mathbf{C}[X]$, $f = X^2 - 2i$.
- (3p) e) Să se afle probabilitatea ca un element din mulțimea $\{-2, -1, 7, 11, 20\}$ să fie soluție a inecuației $2^x < 1024$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$.

- (3p) a) Să se arate că $f(x + 2\pi) = f(x)$, $(\forall)x \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi}$.
- (3p) d) Să se afle câte puncte de extrem local are funcția f în intervalul $(0, 2\pi)$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$.

Descarcă de pe site-ul ebacalaureat.ro

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

Varianța 044

SUBIECTUL III (20p)

În mulțimea $M_2(\mathbf{Z}_3)$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ și submulțimea $G = \{X \in M_2(\mathbf{Z}_3) | X^2 = I_2\}$.

- (4p) a) Să se arate că $I_2 \in G$.
- (4p) b) Să se arate că $A \in G$ și $B \in G$.
- (4p) c) Să se arate că $A \cdot B \neq B \cdot A$.
- (2p) d) Să se arate că $A \cdot B \notin G$.
- (2p) e) Să se rezolve ecuația matriceală $A \cdot X = I_2$, unde $X \in M_2(\mathbf{Z}_3)$.
- (2p) f) Să se determine cel mai mic număr natural n nenul pentru care $(A \cdot B)^n = I_2$.
- (2p) g) Să se arate că mulțimea G are cel puțin 6 elemente.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{-3,0\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x}$.

- (4p) a) Să se calculeze valoarea expresiei $f(x) - 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{10}{x+3} - \frac{1}{x} \right)$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3,0\}$.
- (4p) b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3,0\}$.
- (4p) c) Să se arate că dreptele de ecuații $x = -3$ și $x = 0$ sunt asimptote verticale la graficul funcției f .
- (2p) d) Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției f .
- (2p) e) Să se determine primitivele funcției f pe intervalul $(0, +\infty)$.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_1^n f(x) dx$.

Varianta 044

SUBIECTUL I

a) $|\overrightarrow{AC}| = |-4\vec{i} - 3\vec{j}| = 5$.

b) AB este dreapta verticală $x=4$, deci orice altă dreaptă verticală este paralelă cu AB , de exemplu $x=0$, adică axa Oy .

c) Avem $|AB|=3$, $|BC|=4$ și $|CA|=5$, deci perimetrul triunghiului ABC este 12.

d) $G\left(\frac{8}{3}, -2\right)$.

e) Soluția 1. $\cos(\widehat{CAB}) = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{9}{5 \cdot 3} = \frac{3}{5}$.

Soluția 2. Triunghiul ABC este dreptunghic, $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$, deci

$$\cos(\widehat{CAB}) = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{3}{5}.$$

f) Triunghiul ABC este dreptunghic, $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$, deci raza cercului circumscris triunghiului ABC este jumătate din lungimea ipotenuzei, adică $r = \frac{|AC|}{2} = \frac{5}{2}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $A_4^2 = 12$.

b) Progresia are rația $r = -2$. Avem $a_{10} = a_1 + 9r = -17$.

c) Soluția 1. Dacă ținem cont de formula $C_n^k = C_n^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $C_9^2 + C_9^7 = 2 \cdot C_9^2 = 72$.

Soluția 2. $C_9^2 + C_9^7 = \frac{9!}{2!7!} + \frac{9!}{7!2!} = \frac{8 \cdot 9}{2} + \frac{8 \cdot 9}{2} = 72$.

d) $f(1+i) = (1+i)^2 - 2i = 0$.

e) Numerele care verifică inegalitatea dată sunt $\{-2, -1\}$. Probabilitatea cerută este

$$p = \frac{2}{5} = 0,4.$$

2.

a) $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) = \sin x \cos 2\pi + \cos x \sin 2\pi = \sin x$, deoarece $\sin 2\pi = 0$ și $\cos 2\pi = 1$.

b) $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$.

c) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = f'(\pi) = \cos \pi = -1$.

d) Ecuația $\cos x = 0$ are două soluții în $(0, 2\pi)$. Funcția f are două puncte de extrem local în $(0, 2\pi)$.

e) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$.

SUBIECTUL III

a) $I_2^2 = I_2$, deci $I_2 \in G$.

b) $A^2 = B^2 = I_2$, deci $A \in G$ și $B \in G$.

c) $A \cdot B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}$ și $B \cdot A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$, deci $A \cdot B \neq B \cdot A$.

d) Cum $A \cdot B \neq I_2$, rezultă că $A \cdot B \notin G$.

e) Cum $\det A = \hat{2}$, inversabil în \mathbf{Z}_3 , avem că A este inversabilă. Din $A^2 = I_2$, rezultă $X = A$.

f) Cum $(A \cdot B)^3 = I_2$, rezultă $n = 3$.

g) Se poate arăta că $\left\{ I_2, A, B, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{2} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \right\} \subset G$, deci G are mai mult de 6 elemente.

SUBIECTUL IV

a) $f(x) = 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{10}{x+3} - \frac{1}{x} \right) = 0$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 0\}$.

b) $f'(x) = \frac{3x^2 - 2x - 3}{(x^2 + 3x)^2}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 0\}$.

c) Cum

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} \frac{x^2 + 1}{x(x+3)} = \frac{10}{-3 \cdot 0^-} = \infty \text{ și } \lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} \frac{x^2 + 1}{x(x+3)} = \frac{10}{-3 \cdot 0^+} = -\infty$$

rezultă că dreapta $x = -3$ este asimptotă verticală la graficul funcției f .

Cum

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x^2 + 1}{x(x+3)} = \frac{1}{0^- \cdot 3} = -\infty \text{ și } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2 + 1}{x(x+3)} = \frac{1}{0^+ \cdot 3} = +\infty$$

rezultă că dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f .

d) Ecuația $f'(x)=0$ admite două soluții reale. Funcția f admite două puncte de extrem local.

e) $\int f(x)dx = \int \left(1 - \frac{10}{3(x+3)} + \frac{1}{3x}\right) dx = x - \frac{10}{3} \ln(x+3) + \frac{1}{3} \ln x + C.$

f) Pentru calculul limiei $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$ se poate aplica teorema lui l'Hospital și se obține

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

g)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_1^n f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(x - \frac{10}{3} \ln(x+3) + \frac{1}{3} \ln x \right) \Big|_1^n = 1 - \frac{10}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+3)}{n} + \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 1$$