

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta043

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ dacă dreapta de ecuație $ax + by - 2 = 0$ conține punctele $A(1,1)$ și $B(2,0)$.
- (4p) b) Să se calculeze $\cos x$, dacă se știe că $\sin x = \frac{1}{2}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- (4p) c) Să se afle aria triunghiului ABC , dacă $AB=8$, $AC=6$ și $m(\hat{A}) = 30^\circ$.
- (4p) d) Să se determine conjugatul numărului complex $-2 + 2i$.
- (2p) e) Să se afle modulul numărului complex $z = \frac{(1+i)^2}{1-i}$.
- (2p) f) Să se determine ecuația dreptei care conține punctul $A(-2,1)$ și este paralelă cu dreapta $x = y$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

- (3p) a) Să se determine elementul neutru al legii de compozitie definite prin $x * y = x + y - xy$,
 $\forall x, y \in \mathbf{R}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\log_3 \frac{81}{\sqrt{3}}$.
- (3p) c) Să se afle primul termen al unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ în care $a_3 = 1$, $a_7 = 9$.
- (3p) d) Să se calculeze probabilitatea ca un element al mulțimii $\{1,2,3\}$ să fie soluție a ecuației
 $n^2 - 5n + 6 = 0$.
- (3p) e) Să se calculeze suma și produsul rădăcinilor ecuației $x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$.
2. Se consideră funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.
- (3p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [0, \infty)$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
- (3p) c) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .
- (3p) d) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot f(n)$.
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) \cdot (x+2) dx$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

Varianta 043

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea $M = \left\{ A_x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{Z} \right\}$ și funcția $f : M \rightarrow \mathbf{Z}$, $f(A_x) = x$.

- (4p) a) Să se arate că pentru $A_x, A_y \in M$, $A_x = A_y$ dacă și numai dacă $x = y$.
- (4p) b) Să se arate că dacă $A_x, A_y \in M$ atunci $A_x \cdot A_y \in M$.
- (4p) c) Să se arate că există $A_e \in M$ pentru care $A_x \cdot A_e = A_x, \forall A_x \in M$.
- (2p) d) Să se arate că $\forall A_x \in M$ există $A_a \in M$ pentru care $A_x \cdot A_a = A_a$.
- (2p) e) Să se calculeze $(A_2)^n$, $n \in \mathbf{N}^*$.
- (2p) f) Să se arate că funcția $f : M \rightarrow \mathbf{Z}$, $f(A_x) = x$ este bijectivă și $f(A_x \cdot A_y) = f(A_x) + f(A_y)$, $\forall A_x, A_y \in M$.
- (2p) g) Să se calculeze $\det(A_1 + A_1^2 + A_1^3 + \dots + A_1^{2007})$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = e^{-x} \cdot (2x+3)$.

- (4p) a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- (4p) b) Să se stabilească intervalele de monotonie ale funcției f .
- (4p) c) Să se determine ecuația asymptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- (2p) d) Să se determine $\int f(x)dx$, $x \in \mathbf{R}$.
- (2p) e) Să se calculeze aria $S(a)$ a mulțimii cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0, x = a$, unde a este un număr real nenegativ.
- (2p) f) Să se calculeze $\lim_{a \rightarrow \infty} S(a)$.
- (2p) g) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.

Varianta 043

SUBIECTUL I

a) *Soluția* 1. Ecuația dreptei AB este $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$. După calcularea determinantului

se obține $x + y - 2 = 0$, deci $a = b = 1$.

Soluția 2. Dacă $A(1,1)$ este situat pe dreapta $ax + by - 2 = 0$, atunci $a + b = 2$.

Dacă $B(2,0)$ este situat pe dreapta $ax + by - 2 = 0$, atunci $2a = 2$. Se obține sistemul $\begin{cases} a+b=2 \\ a=1 \end{cases}$ cu soluția $a = b = 1$.

b) *Soluția* 1. Dacă $\sin x = \frac{1}{2}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, atunci $x = \frac{\pi}{6}$ și $\cos x = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

Soluția 2. Folosim formula fundamentală a trigonometriei $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $x \in \mathbf{R}$.

c) Aria triunghiului ABC este $\frac{AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}}{2} = 12$.

d) $\bar{z} = -2 - 2i$.

e) $|z| = \sqrt{2}$

f) $y = x + 3$.

SUBIECTUL II

1.

a) $A_4^2 = 12$.

b) Progresia are rația $r = -2$. Avem $a_{10} = a_1 + 9r = -17$.

c) *Soluția* 1. Dacă ținem cont de formula $C_n^k = C_n^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$, $n \in \mathbf{N}^*$, atunci $C_9^2 + C_9^7 = 2 \cdot C_9^2 = 72$.

Soluția 2. $C_9^2 + C_9^7 = \frac{9!}{2!7!} + \frac{9!}{7!2!} = \frac{8 \cdot 9}{2} + \frac{8 \cdot 9}{2} = 72$

d) $f(1+i) = (1+i)^2 - 2(1+i) = -2$.

e) Numerele care verifică inegalitatea sunt $\{-2, -1\}$. Probabilitatea cerută este

$$p = \frac{2}{5} = 0,4$$

2.

a) $f'(x) = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}, x > 0.$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = \frac{2e}{9}.$

c) Deoarece $f'(x) > 0$ oricare ar fi $x > 0$, funcția f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$ și atunci funcția f nu are puncte de extrem.

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n e^n}{n+2} = \infty.$

e) $\int_0^1 f(x) \cdot (x+2) dx = \int_0^1 e^x dx = e - 1.$

SUBIECTUL III

a) Egalitatea $A_x = A_y$ este echivalentă cu $A_x - A_y = O_2$, adică $\begin{pmatrix} 0 & x-y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ceea ce este echivalent cu $x = y$.

b) Avem $A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$ deoarece $x+y \in \mathbb{Z}$ pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$.

c) Egalitatea $A_x \cdot A_e = A_x$ revine la $x+e=x$, deci $e=0$. Atunci $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$.

d) Egalitatea $A_x \cdot A_a = A_e$ revine la $x+a=0$, deci $a=-x$. Atunci

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M.$$

e) Avem $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se arată prin inducție matematică că $(A_2)^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oricare

ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

f) Din a) rezultă injectivitatea funcției f . Pentru orice număr întreg x există matricea $A_x \in M$ pentru care $f(A_x) = x$, deci f este surjectivă. Atunci funcția f este bijectivă. În plus, $f(A_x \cdot A_y) = f(A_{x+y}) = x+y = f(A_x) + f(A_y)$ oricare ar fi $A_x, A_y \in M$.

g) Se demonstrează, folosind metoda inducției matematice, că $(A_1)^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$n \in \mathbf{N}^*. \text{ Atunci } \sum_{k=1}^{2007} (A_1)^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{2007} 1 & \sum_{k=1}^{2007} k \\ 0 & \sum_{k=1}^{2007} 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2007 & \sum_{k=1}^{2007} k \\ 0 & 2007 \end{pmatrix}. \text{ Rezultă}$$

$$\det(A_1 + A_1^2 + A_1^3 + \dots + A_1^{2007}) = 2007^2.$$

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = e^{-x}(-2x-1)$, $x \in \mathbf{R}$.

b) Ecuația $f'(x) = 0$ are soluția $x_1 = -\frac{1}{2}$. Deoarece $f'(x) < 0$ pentru $x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

rezultă că f este descrescătoare pe intervalul $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$, iar din faptul că $f'(x) > 0$

pentru $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ rezultă că f este crescătoare pe intervalul $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.

c) Aplicând regula lui l'Hospital, avem $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{e^x} = 0$, deci $y = 0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$.

d) $\int f(x) dx = -\frac{2x+5}{e^x} + C$, $C \in \mathbf{R}$.

e) $\int_0^a f(x) dx = 5 - \frac{2a+5}{e^a}$.

f) Folosind faptul că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$, obținem că $\lim_{a \rightarrow \infty} S(a) = 5$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x} \cdot \frac{1}{e^x} = 0$.