

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007**
**Proba scrisă la MATEMATICĂ**
**PROBA D**
***Varianta ....042***

Proba D. Programa M1. Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările  
 ♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

**La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete**

**SUBIECTUL I ( 20p )**

În sistemul cartezian  $xOy$  se consideră punctul  $A(-1, 3)$  și dreapta  $d : y = 3x + 2$ .

- (4p) a) Să se determine ecuația dreptei ce trece prin  $A$  și este paralelă cu dreapta  $d$ .
- (4p) b) Să se determine distanța de la punctul  $A$  la dreapta  $d$ .
- (4p) c) Să se determine coordonatele simetricului punctului  $A$  față de axa  $Oy$ .
- (4p) d) Să se determine coordonatele centrului cercului de ecuație  $x^2 + 2x + y^2 = 0$ .
- (2p) e) Să se determine  $a \in \mathbf{R}$  astfel încât, pentru  $z = a + i \in \mathbf{C}$ , să avem  $|z| = |z - 1|$ .
- (2p) f) Să se determine partea reală a numărului complex  $(1+2i)^2$ .

**SUBIECTUL II ( 30p )**
**1.**

- (3p) a) Să se calculeze  $\log_2 4 + \log_2 \frac{1}{4}$ .
- (3p) b) Să se determine probabilitatea ca alegând două dintre elementele mulțimii  $\{1, 2, 3, 4\}$ , suma acestora să fie divizibilă cu 2.
- (3p) c) Se consideră ecuația  $x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$ , care are soluțiile complexe  $x_1, x_2, x_3$ .  
 Să se calculeze  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ .
- (3p) d) Să se rezolve ecuația  $2^{2^x} = 16$ .
- (3p) e) Să se calculeze determinantul matricei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

2. Se consideră funcția  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = e^{2x}$ .

- (3p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- (3p) b) Să se demonstreze că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbf{R}$ .
- (3p) c) Să se rezolve ecuația  $f'(x) + x \cdot f(x) = 0$ .
- (3p) d) Să se calculeze  $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) \cdot f'(x) dx$ .
- (3p) e) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

**SUBIECTUL III ( 20p )**

Pentru o matrice  $M \in M_2(\mathbf{C})$ ,  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , se notează  $tr(M) = a + d$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $tr(A)$ , unde  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .
- (4p) b) Să se arate că dacă  $B, C \in M_2(\mathbf{C})$  și  $B = C$ , atunci  $tr(B) = tr(C)$ .
- (4p) c) Să se găsească două matrice diferite,  $P, Q \in M_2(\mathbf{C})$ , pentru care  $tr(P) = tr(Q)$ .
- (2p) d) Să se calculeze  $tr(U \cdot V)$  și  $tr(U \cdot W)$ , dacă  $U, V, W \in M_2(\mathbf{C})$ ,  
 $U = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ ,  $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
- (2p) e) Să se arate că  $tr(aD + bE) = a \cdot tr(D) + b \cdot tr(E)$ ,  $\forall a, b \in \mathbf{C}$ ,  $\forall D, E \in M_2(\mathbf{C})$ .
- (2p) f) Să se arate că  $tr(F \cdot G) = tr(G \cdot F)$ ,  $\forall F, G \in M_2(\mathbf{C})$ .
- (2p) g) Să se arate că, dacă  $L, N \in M_2(\mathbf{C})$  și  $tr(L \cdot X) = tr(N \cdot X)$ ,  $\forall X \in M_2(\mathbf{C})$ , atunci  $L = N$ .

**SUBIECTUL IV ( 20p )**

Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(\ln(x+1) - \ln x)$ .

- (4p) a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in (0, \infty)$ .
- (4p) b) Să se arate că  $f''(x) = \frac{1}{2x^2(x+1)^2}$ ,  $\forall x > 0$ .
- (4p) c) Să se arate că funcția  $f'$  este strict crescătoare pe intervalul  $(0, \infty)$ .
- (2p) d) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ .
- (2p) e) Să se calculeze  $\int_1^e f'(x)dx$ .
- (2p) f) Să se arate că funcția  $f$  este strict descrescătoare pe intervalul  $(0, \infty)$ .
- (2p) g) Să se arate că  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1+1}{2}}$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ .

## VARIANTA 042

### SUBIECTUL I

- a) Coeficientul unghiular al dreptei  $d$  este 3, deci dreapta cautata este  $y - 3 = 3(x + 1) \Leftrightarrow y = 3x + 6$
- b)  $d(A, d) = \frac{|3+3-2|}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$
- c) Evident, simetricul lui  $A(-1,3)$  fata de  $OY$  este  $A'(1,3)$
- d)  $x^2 + 2x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1$  deci centrul este  $A'(-1,0)$
- e)  $|a+i| = |a-1+i| \Leftrightarrow \sqrt{1+a^2} = \sqrt{(a-1)^2 + 1} \Leftrightarrow 1+a^2 = 1+(a-1)^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$
- f) Notez  $z = \left(1+i \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right)^2 \Rightarrow z = (1+i\sqrt{3})^2 = 1-3+2i\sqrt{3} = -2+2i\sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{Real} z = -2$

### SUBIECTUL II

1.

- a)  $\log_2 4 + \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^2 + \log_2 2^{-2} = 2 - 2 = 0$
- b) Deoarece suma a doua pare sau doua impare este pară, probabilitatea ceruta este  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- c)  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 4 - 2 \cdot 3 = -2$
- d)  $2^{2^x} = 16 \Leftrightarrow 2^{2^x} = 2^4 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$
- e)  $\det A = 4 - 6 = -2$

2.

- a)  $f'(x) = 2e^{2x} \forall x \in R$
- b)  $f''(x) = 4e^{2x} > 0 \Rightarrow f$  este convexă pe  $R$
- c)  $f'(x) + xf(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} + xe^{2x} \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$
- d)  $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (f^2(x))' dx = \frac{1}{2} (f^2(x)) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} f^2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} f^2(0) = \frac{1}{2} e^{4 \cdot \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} e^{4 \cdot 0} = \frac{1}{2} (e^2 - 1)$
- e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$

### SUBIECTUL III

a)  $tr(A) = 5.$

b) Fie  $B = C = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ . Atunci  $tr(B) = e + h = tr(C)$ .

c) Alegem  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  si  $Q = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$  si  $tr(P) = tr(Q) = 5, P = Q$

d) Cum  $U \cdot V = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & 0 \\ r & 0 \end{pmatrix}$ , rezulta ca  $tr(U \cdot V) = p$ .

Apoi  $U \cdot W = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & p \\ 0 & r \end{pmatrix}$  si  $tr(U \cdot W) = r$ .

e) Fie  $D = \begin{pmatrix} d & e \\ f & g \end{pmatrix}$  si  $E = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ . Atunci  $(aD + bE) =$

$= \begin{pmatrix} ad + bm & ae + bn \\ af + bp & ag + bq \end{pmatrix}$  si  $tr(aD + bE) = ad + bm + ag + bq$ . Apoi

$$a \cdot tr(D) + b \cdot tr(E) = a(d + g) + b(m + q) = tr(aD + bE).$$

f) Luăm  $F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  si  $G = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  si  $F \cdot G = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cz + dz & cy + dt \end{pmatrix}$  sau

$tr(F \cdot G) = ax + bz + cy + dt$ . Apoi  $G \cdot F = \begin{pmatrix} xa + yc & xb + yd \\ za + tc & zb + dt \end{pmatrix}$  si

$$tr(G \cdot F) = ax + cy + bz + dt = tr(F \cdot G).$$

g) Fie  $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  si  $N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ . Daca luam  $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , vom obtine  $c = g$ ; pentru  $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  va rezulta  $b = f$ , iar pentru  $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  vom avea  $d = h$ . Deci  $L = N$ .

### SUBIECTUL IV

a)  $f'(x) = (\ln(x+1) - \ln x) + \left( x + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right) = \ln \frac{x+1}{x} - \frac{2x+1}{2x(x+1)}$  ( $\forall x > 0$ )

b)  $f''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + (x+\frac{1}{2}) \left( -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^2} \right) =$

$$= \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x} + \frac{2x+1}{2} \cdot \frac{-x^2+x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{-2}{x(x+1)} + \frac{(2x+1)^2}{2x^2(x+1)^2} = \\ = \frac{-4x^2 - 4x + 4x^2 + 4x + 1}{2x^2(x+1)^2} = \frac{1}{2x^2(x+1)^2}, (\forall) x > 0$$

c)  $f''(x) = \frac{1}{2x^2(x+1)^2} > 0, (\forall) x > 0 \Rightarrow f' \text{ este strict crescatoare pe } (0, \infty)$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \ln \frac{x}{x+1} - \frac{2x+1}{2x(x+1)} \right] = \ln 1 - 0 = 0$

e)  $\int_1^e f'(x) dx = f(e) - f(1) = \left( e + \frac{1}{2} \right) (\ln(e+1) - 1) - \frac{3}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \left( e + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{e+1}{e} - \frac{3 \ln 2}{2}$

f) Deoarece  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$  si  $f'$  este strict crescatoare, rezulta ca  $f'(x) < 0 \ (\forall) x > 0 \Rightarrow f$  e strict descrescatoare.

g) Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ ; deoarece  $f$  este strict descrescatoare si  $n < n+1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(n) > f(n+1) \Leftrightarrow \left( n + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{n+1}{n} > \left( n+1 + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{n+2}{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln \left( \frac{n+1}{n} \right)^{\frac{n+1}{2}} > \ln \left( \frac{n+2}{n+1} \right)^{\frac{n+1+1}{2}} \Leftrightarrow \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{n+1}{2}} > \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{\frac{n+1+1}{2}} \text{ (am folosit monotonia functiei ln)}$$