

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007
Proba scrisă la MATEMATICĂ
PROBA D
Varianta041

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

♦ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

- (4p) a) Să se calculeze $\sin^2 \frac{\pi}{2007} + \cos^2 \frac{\pi}{2007}$.
- (4p) b) Să se calculeze produsul $\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \dots \cdot \cos 179^\circ$.
- (4p) c) Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât punctul $A(-m, m)$ să aparțină dreptei de ecuație $3x - 4y + 14 = 0$.
- (4p) d) Să se calculeze distanța de la punctul $M(2,3)$ la dreapta de ecuație $3x - 4y + 14 = 0$.
- (2p) e) Să se calculeze modulul numărului complex $z = 1 - i\sqrt{3}$.
- (2p) f) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral pentru care două dintre vârfuri sunt $A(4,3)$ și $B(8,6)$.

SUBIECTUL II (30p)
1.

- (3p) a) Să se rezolve în intervalul $(0, \infty)$ ecuația $\log_2 x = -1$.
- (3p) b) Să se calculeze a_7 , dacă în progresia geometrică $(a_n)_{n \geq 1}$ se cunosc $a_1 = 1$ și $a_3 = 4$.
- (3p) c) Să se calculeze restul împărțirii polinomului $f = X^3 + X^2 + X + 1$ la $g = X + 1$.
- (3p) d) Să se dea un exemplu de funcție neconstantă $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ pentru care $f(-3) = f(3)$.
- (3p) e) Să se calculeze probabilitatea ca un element din mulțimea $M = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ să fie patrat perfect.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

- (3p) a) Să se demonstreze că: $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$, $\forall x \in \mathbf{R} - \{-1\}$.
- (3p) b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.
- (3p) c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x)$.
- (3p) d) Să se determine ecuația asymptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- (3p) e) Să se calculeze $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+1} \right) dx$.

Descarcat de pe site-ul ebacalaureat.ro

Proba D.Programa M1.Filiera teoretică, specializarea Științe ale naturii; Filieră tehnologică, profil Tehnic, toate specializările

Varianta 041

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, unde $a,b,c,d,e,f,g,h \in \mathbf{R}$ și funcția

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \det(Ax + B).$$

(4p) a) Să se calculeze $\det(A)$.

(4p) b) Să se demonstreze că $f(0) = eh - fg$.

(4p) c) Să se arate că $Ax + B = \begin{pmatrix} ax + e & bx + f \\ cx + g & dx + h \end{pmatrix}, \forall x \in \mathbf{R}$.

(2p) d) Să se calculeze $\begin{vmatrix} a & f \\ c & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & b \\ g & d \end{vmatrix}$.

e) Să se demonstreze că $f(x) = \det(A) \cdot x^2 + mx + \det(B), \forall x \in \mathbf{R}$, unde

$$m = \begin{vmatrix} a & f \\ c & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & b \\ g & d \end{vmatrix}.$$

(2p) f) Dacă $A, B \in M_2(\mathbf{R})$, $\det(A + B) = 2$ și $\det(A - B) = 2$, să se calculeze $\det(A) + \det(B)$.

(2p) g) Dacă $A, B \in M_2(\mathbf{R})$ și $\det(A - B) = \det(B) = \det(A + B) = 2$ să se demonstreze că $\det(Ak + B) = 2, \forall k \in \mathbf{R}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră funcția $f : [-1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (1+x)^r - 1 - rx$, unde $r \in \mathbf{R}$, $r > 1$ și se

definește sirul $(e_n)_{n \geq 1}$ prin $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $\forall n \geq 1$.

(4p) a) Să se calculeze $f(0)$.

(4p) b) Să se calculeze $f'(x), x > -1$.

(4p) c) Să se rezolve ecuația $f'(x) = 0, x > -1$.

(2p) d) Să se demonstreze că funcția f este strict descrescătoare pe $[-1, 0]$ și strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

(2p) e) Să se demonstreze că $(1+x)^r \geq 1 + rx; \forall x > -1$.

(2p) f) Să se demonstreze că $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \quad \forall n \geq 1$.

(2p) g) Să se demonstreze că sirul $(e_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător.

Varianta 041

SUBIECTUL I

- a) $\sin^2 \frac{\pi}{2007} + \cos^2 \frac{\pi}{2007} = 1$.
- b) $\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \dots \cdot \cos 179^\circ = 0$, deoarece $\cos 90^\circ = 0$.
- c) $m = 2$.
- d) $\frac{8}{5}$.
- e) $|1 - i\sqrt{3}| = 2$.
- f) Cum $AB = 5$, aria triunghiului echilateral este $\frac{25\sqrt{3}}{4}$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $x = \frac{1}{2}$.
- b) $a_7 = 2^6 = 64$.
- c) $f(-1) = 0$.
- d) Pentru funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$ are loc relația $f(-3) = f(3)$.
- e) $p = \frac{1}{10}$.

2.

- a) $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$.
- b) $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1$.
- c) $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right) = -1$.
- d) Ecuația asimptotei spre $+\infty$ este $y = mx + n$, deci $y = x - 1$.
- e) $\int_0^1 \left[f(x) - \frac{1}{x+1} \right] dx = \int_0^1 (x-1) dx = -\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL III

- a) $\det(A) = ad - bc$.

b) $f(0) = \det(A \cdot 0 + B) = \det(B) = eh - fg$.

c) $Ax + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + e & bx + f \\ cx + g & dx + h \end{pmatrix}, \forall x \in \mathbf{R}$.

d) $\begin{vmatrix} a & f \\ c & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & b \\ g & d \end{vmatrix} = ah - fc + ed - bg$.

e) Prin calcul direct obținem

$$\begin{aligned} f(x) &= \det(Ax + B) = \begin{vmatrix} ax + e & bx + f \\ cx + g & dx + h \end{vmatrix} \\ &= (ad - bc)x^2 + (ah - fc + ed - bg)x + eh - fg \\ &= x^2 \det(A) + mx + \det(B) \end{aligned}$$

f) Folosind egalitatea de la e) avem $\det(A + B) = \det(A) + m + \det(B) = 2$ și

$\det(A - B) = \det(B) - m + \det(A) = 2$. Dacă adunăm cele două egalități obținem

$\det(A) + \det(B) = 2$.

g) Folosind f) și condiția $\det(A - B) = \det(B) = \det(A + B) = 2$ se obține

$\det(A) = 0$. Din e) rezultă $\det(Ak + B) = mk + 2$. Pe de altă parte, din e) și

$\det(A - B) = \det(B) = \det(A + B) = 2$ rezultă $m = 0$. Atunci $\det(Ak + B) = 2$.

SUBIECTUL IV

a) $f(0) = 0$.

b) $f'(x) = r(1+x)^{r-1} - r$, $x \geq -1$.

c) Egalitatea $f'(x) = 0$ implică $(1+x)^{r-1} = 1$. Cum $r > 1$, singura soluție este $x = 0$.

d) Pentru $x \in [-1, 0]$, avem $1+x \leq 1$, deci $r \cdot (1+x)^{r-1} < r$. Atunci $f'(x) < 0$ pentru $x \in [-1, 0]$ și astfel, f este strict descrescătoare pe $[-1, 0]$. Pentru $x \in [0, \infty)$, avem $1+x \geq 1$, deci $r \cdot (1+x)^{r-1} > r$. Atunci $f'(x) > 0$ pentru $x \in [0, \infty)$ și astfel, f este crescătoare pe $[0, \infty)$.

e) De la punctul d) rezultă că $x = 0$ este punct de minim pentru funcția f . Atunci

$f(x) \geq f(0)$ oricare ar fi $x \geq -1$. Aceasta implică $(1+x)^r \geq 1+rx$; $\forall x > -1$.

f) $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \right]^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right]^n \cdot \frac{n+2}{n+1}$, $n \geq 1$.

g) Pentru $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^n \cdot \frac{n+2}{n+1}$ aplicăm inegalitatea de la e) și obținem
 $\frac{e_n}{e_{n+1}} \geq \left[1 + n \cdot \left(\frac{-1}{(n+1)^2}\right)\right] \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} > 1, \quad n \geq 1$, deci sirul $(e_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător.